Fortsetzung: Funktionen einer komplexen Zahl: I.4 Potenz- und Laurentreihen

Def: Eine *unendliche Reihe* ist gegeben durch den formalen Ausdruck $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = c_0 + c_1 + \ldots$, mit $c_j \in \mathbb{C}\ \forall j$. Die n-te *Partialsumme* ist $S_n = \sum_{j=0}^{n} c_j$. Wenn die Folge $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dieser einen Limes hat *konvergiert* die unendl. Reihe: $S = \sum_{j=0}^{\infty}$, ansonsten *divergiert* sie.

(*Konvergenz* ist def wie auf $\mathbb{R}$: $\{S_n\}$ hat den Limes $S = \lim_{n\to\infty} S_n$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad |S_n - S| < \varepsilon$)

Beispiel: die *geometrische Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \frac{1}{1-a}$ ist für $|a| < 1$, $a \in \mathbb{C}$, konvergent und für $|a| > 1$ divergent.

Dies ist einfach zu sehen: $(1-a) S_n = (1-a)(1 + a + \ldots + a^n) = 1 - a^{n+1}$, $a = re^{i\varphi}$

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} \rightarrow \frac{1}{1-a}$ wenn $|a| < 1$ da dann $a^{n+1} = \underset{\downarrow \atop 0}{r^{n+1}} \underbrace{e^{i(n+1)\varphi}}_{\text{beschränkt}}$ für $n \to \infty$

Konvergenzkriterien von Reihen (wie auf $\mathbb{R}$) $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$

1. *Vergleichskriterium*: $\exists k: \quad \forall j > k \quad |c_j| \leq m_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} m_j$ konvergiert
   (oft: vgl. mit geom. Reihe) $\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} c_j$ konvergiert ebenfalls
2. *Quotientenkriterium*: Wenn der Limes $\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right| \xrightarrow[j\to\infty]{} q$ existiert ist $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ konvergent für $|q| < 1$ und divergent für $|q| > 1$.

Def Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ heißt *absolut konvergent* wenn $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|$ $(\in \mathbb{R})$ konvergiert.

Absolut konvergente Reihen können (genauso wie endliche Reihen) Term für Term addiert, multipliziert und sogar differenziert werden, wenn $c_j = c_j(z)$.
"Weierstraßscher Konvergenzsatz"

Def. Die unendliche Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{a_j z^j}_{g_j(z)}$ heißt Potenzreihe mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$

Fragen: Für welche Werte von z konvergiert diese Σ? Ist die Potenzreihe eine analytische Fkt? Ist die Potenzreihendarstellung einer Funktion eindeutig?

Theorem (N.H. Abel) Wenn eine Potenzreihe für einen Wert $z = z_0$ konvergiert, dann konvergiert sie $\forall z$ mit $|z|<|z_0|$ absolut.
(Beweis: Vergleichskriterium)
Hieraus folgt daß wenn eine Potenzreihe für ein $z=z_0$ divergiert so divergiert sie $\forall z: |z|>|z_0|$.

$$q = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{g_{j+1}(z)}{g_j(z)}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{j+1} z^{j+1}}{a_j z^j}\right| = \frac{|z|}{R} \overset{!}{<} 1$$

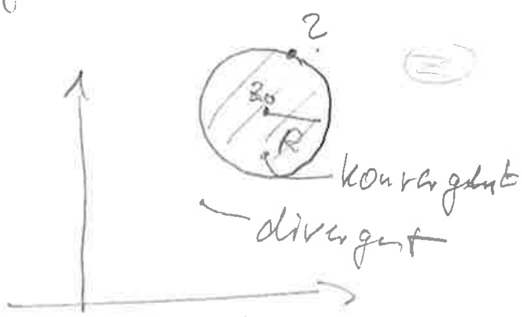
Konvergenzradius R:

Thm: Für jede Potenzreihe $s(z)=\sum_{j=0}^\infty a_j z^j$ gibt es ein R mit $\boxed{0\le R\le\infty}$ welches nur von den a_j abhängt; $\boxed{R = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_j}{a_{j+1}}\right|}$, sodaß gilt:
- $s(z)$ konvergiert $\forall z: |z|<R$, und sogar absolut $\forall z: |z|\le R' < R$
- und $s(z)$ divergiert $\forall z: |z|>R$. R heißt Konvergenzradius.

- Es gilt, daß jede Potenzreihe innerhalb v. R analytisch ist!

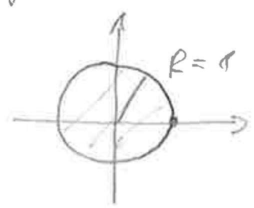
Dieses Konzept kann durch Verschiebung leicht auf allgemeine Potenzreihen um einen Punkt z_0 verallgemeinert werden:

$$\boxed{s(z)=\sum_{j=0}^\infty a_j (z-z_0)^j} \quad a_j\in\mathbb{C}$$



Darüber, ob die Potenzreihe auf dem Rand des Kreises mit Konvergenzradius R konvergiert oder divergiert gibt es i.A. keine Aussage!

- Typische Situation:



die geom. Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^\infty z^j$

divergiert auf genau 1 Punkt $z=1$ auf dem Konvergenzradius $(R=1)$: sie hat einen (einfachen) Pol bei $z=1$. Die Fkt $f(z)=\frac{1}{1-z}$ macht auch für $|z|>1$ Sinn!

Beispiele für elementare Funktionen, die durch eine Potenzreihe gegeben sind

- Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$: $\boxed{e^z = \exp[z] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}}$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R = \lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)!}{j!} = \infty$, konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$! ($|z| < \infty$)

wichtige Eigenschaften: $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(j-1)!} = e^z \quad \Rightarrow \ddot{u}$$

(check daß dieselbe Funktion wie $e^x(\cos y + i \sin y)$)

- Die "Winkel"funktionen und deren hyperbolische Partner:

komplex Cosinus hyperbolikus
— " — Sinus — " —

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh(z)\ (= \mathrm{ch}(z)) &= \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\ \sinh(z)\ (= \mathrm{sh}(z)) &= \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}}$$

haben beide ebenfalls $R = \infty$.

— " — Cosinus
— " — Sinus
(beide $R = \infty$)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(iz) = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \tfrac{1}{i}\sinh(iz) = \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}}$$

und für

$\cos(z) \neq 0$: $\boxed{\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}}$, $\cosh(z) \neq 0$: $\boxed{\tanh(z)\ (= \mathrm{th}(z)) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}}$

Tangens Tangens hyperbolikus

Eigenschaften:

Zur Erinnerung: wir hatten bereits gesehen

Eulers $\forall \varphi \in \mathbb{R}$: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, nun $\forall z \in \mathbb{C}$: $\boxed{e^{iz} = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}) = \cos(z) + i \sin(z)}$ Eulerformel auf $\mathbb{C}$

dito $e^{iz_1} e^{iz_2} \overset{\ddot{u}}{=} e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1+z_2) + i \sin(z_1+z_2)$

- $\boxed{\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$

$\Rightarrow$ $e^{i(z+\pi)} = \cos(z+\pi) + i \sin(z+\pi) = e^{iz} (e^{i\pi})^{-1} = -e^{iz}$

$= -\cos(z) - i \sin(z)$, d.h. dieselben Periodizitäten wie in $\mathbb{R}$

• Umkehrfunktionen: wir haben bereits gesehen: $\boxed{z(w) = w^n}$ hat die Umkehrfunktion $\boxed{w(z) = z^{\frac{1}{n}}}$ n-te Wurzel

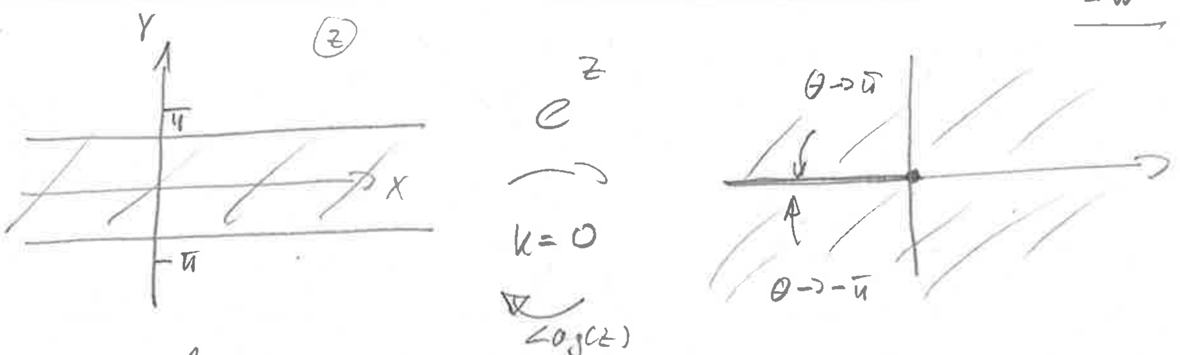
Wir möchten nun zeigen, daß der Logarithmus, den wir auf Seite 11 definiert haben $\log(z) = \log|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$

die Umkehrfunktion der

Exponentialfunktion im komplexen ist, $z \in \mathbb{C}$. Diese ist definiert als

$\boxed{e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}}$ und löst $(e^z)' = e^z$ (Ü 2.2. $f(z) = e^x e^{iy}$ löst auch $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$, $f(z) = e^z$ ✓)

Bild von e^z in Polarkoordinaten $z = x + iy$: $\underbrace{e^z = e^x e^{iy}}_{=w} = \rho e^{i\theta}$, $\begin{cases} \rho = e^x \\ \theta = y + 2\pi k \end{cases}$ Polar coord, $k \in \mathbb{Z}$



• Die Streifen $\pi < y < 3\pi$, $3\pi < y < 5\pi$ etc. oberhalb und unterhalb $-\pi < y < -3\pi$ etc. werden alle wieder auf die geschlitzte Ebene abgebildet. surjektiv, nicht injektiv auf $\mathbb{C}$

Def: Die komplexe Exponentialfunktion e^z definiert die Abbildung des Streifens $\{z \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < +\pi\}$ auf die geschlitzte Ebene.
Das Inverse dieser Abbildung ist der Hauptzweig des Logarithmus $\mathrm{Log}(z)$. Die Inversen der Abb. von e^z der übrigen Streifen wird durch die entsprechenden Nebenzweige $\log(z)$ gegeben.

Zurück zu oben (Zeige daß Inverse) $\mathrm{Log}(e^z) = \mathrm{Log}(w = \rho e^{i\theta}) = \log(\rho) + i\theta$ $k = 0$, $\theta \in (-\pi, \pi)$

$= \log(e^x) + iy = x + iy = z$

Und entsprechend für $\rho = e^x$, $\theta = y + 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$.

⟹ Ableitung $\boxed{\mathrm{Log}(w)' = \frac{1}{w(z)'} = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}}$

$e^z = w(z)$ $\quad (= z(w)')$

$z(w) = \mathrm{Log}(w)$ und wegen $\log(z) = \mathrm{Log}(z) + i2\pi k$ gilt $\boxed{\log(z)' = \mathrm{Log}(z)' = \frac{1}{z}}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

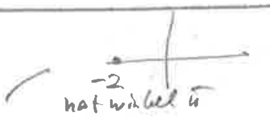
- Wir halten wie auf $\mathbb{R}$ gesehen: gilt $(z^n)' = n z^{n-1}$, $z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$,

→ Was ist mit allgemeinen, reellen (oder gar komplexen) Potenzen?

für beliebige $a, b, z \in \mathbb{C}$ definiere folgende Funktionen:

$\boxed{f(z) = z^b =: e^{b\log(z)}}$ und $\boxed{g(z) = a^z = e^{z\log(a)}}$

- d.h. sind f und g wie der Logarithmus selbst mehrwertig, mit ∞ vielen Zweigen.



Bsp: $z = -2$, $b = i$ ⟹ $z^b = (-2)^i = e^{i\log(-2)} = \exp[i(\log|2| + i\pi + i2k\pi)]$ $k \in \mathbb{N}$

$= e^{i\log 2 - \pi - 2\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$

- Ist dies konsistent mit unseren bisherigen Definitionen von z^n, $z^{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$?

$\boxed{z^b = e^{b(\mathrm{Log}|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k))} \quad k \in \mathbb{Z}}$

d.h. für $b \in \mathbb{N}$ ist dies eindeutig da $e^{ibk\cdot 2\pi} = 1$

für $b = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n Werte mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$ wie bei der Definition der Wurzel (mit $m = 1$)

Bsp: Umkehrfunktion von hyperbolischen u. trigonometrischen Fkt von $z \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(e^z - e^{-z})}{\cancel{\frac{1}{2}}(e^z + e^{-z})}} = w(z) \overset{\cdot e^z}{\Longleftrightarrow} (e^{2z} - 1) = w \cdot (e^{2z} + 1)$

$\Longleftrightarrow e^{2z}(1 - w) = 1 + w \overset{\frac{1}{2}\log}{\Longrightarrow} \boxed{z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)}$ was ebenfalls mehrwertig ist

$w \neq 1$