Beispiel für analytische Fortsetzung: Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(z)$

Sei $\boxed{\Gamma(z) := \int_0^\infty dt\, t^{z-1}\, e^{-t}}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$

* Wie ist das definiert, reelles Integral über komplexwertige Funktion?

$$t^z = e^{z\log(t)} = e^{x\log(t)+iy\log(t)} = \underbrace{e^{x\log(t)}}_{t^x}\left(\cos(y\log(t)) + i\sin(y\log(t))\right)$$

d.h. $\Gamma(z) = u + iv$ durch 2 reelle Integrale $u(x,y)$ und $v(x,y)$ gegeben

* Wann konvergiert dieses Integral?

- für $t \to \infty$: e^{-t} geht schneller gegen 0 als in t^z $e^{x\log(t)}$ divergiert
  ($-t$ „schlägt" $+\log(t)$ für $t\to\infty$)

- für $t \to 0$:
  wegen $e^{-t} \approx 1$ betrachte die Konvergenz von

$$\int_0^\varepsilon \frac{dt}{t}\, t^z e^{-t} \approx \int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^{1-z}} = \int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^{1-x}}\, \underbrace{e^{+iy\log(t)}}_{\text{erfüllt } |e^{iy\log(t)}| = 1} \le \int_0^\varepsilon dt \left|\frac{1}{t^{1-x}}\right|$$

$\Rightarrow$ das Integral konvergiert absolut

falls $1-x < 1 \iff \boxed{x = \mathrm{Re}(z) > 0}$

$\exists$ Rekursionsbeziehung: $\quad (t^z)' = z\, t^{z-1}$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt\, t^z \underbrace{e^{-t}}_{-\frac{d}{dt}e^{-t}} = \int_0^\infty dt \left[-\frac{d}{dt}\left(t^z e^{-t}\right) + z\, t^{z-1} e^{-t}\right]$$

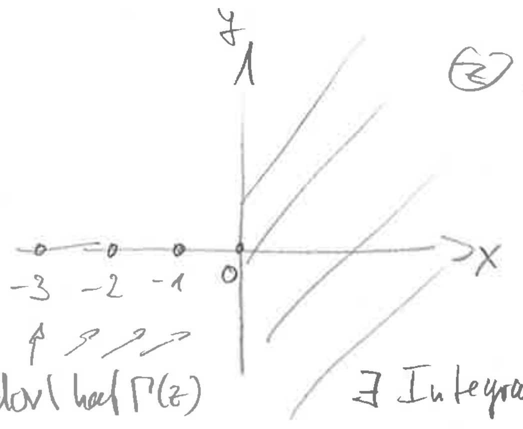
$$= \left[t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\,\Gamma(z)$$

$\to 0$ für $t \to \infty$

0 für $t \to 0$ da $\underbrace{e^{x\log(t)+iy\log(t)}}_{\to 0}$ für $x > 0$

- die Euler-Γ-Fkt kann so fortgesetzt werden, daß sie fast überall diese Rekursion erfüllt, auch wo die Int.-darst. nicht konvergiert

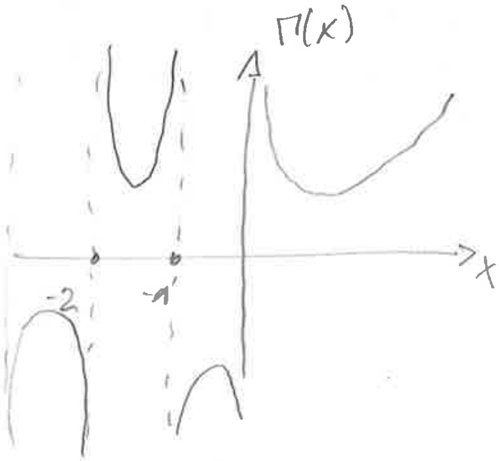
$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ z.B. für $z = -\frac{1}{2}$: $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{(-\frac{1}{2})}\Gamma(-\frac{1}{2}+1) = -2\,\Gamma(\frac{1}{2})$



dort hat $\Gamma(z)$ einfache Pole

$\exists$ Integraldarstellung

Graph für $y = \Gamma(z)$, $z = x$



- so gilt $\forall z \notin -\mathbb{N}$ $\quad \Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{z}{n}\right)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}$

- für $z \in \mathbb{N}_+$ gilt

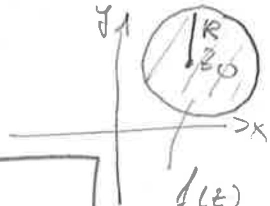
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Laurent Reihen:

- aus der Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, mit Konvergenz-radius $R = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{a_j}{a_{j+1}}\right)$ läßt sich eine neue Reihe mit negativen Potenzen def.



$f(z)$ konvergiert f. $|z-z_0| < R$

$$\boxed{g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{z}^k}$$

mit $\tilde{z} = \frac{1}{(z-z_0)}$. Diese konvergiert wenn $|\tilde{z}| < R \underset{R\neq 0}{\iff} \frac{1}{R} < |z-z_0|$

Def Eine Laurentreihe enthält positive und negative Koeffizienten a_k:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\ a_k \in \mathbb{C}$$

$$= \underbrace{f_1(z)}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{f_2(z)}_{\text{Hauptteil}}$$

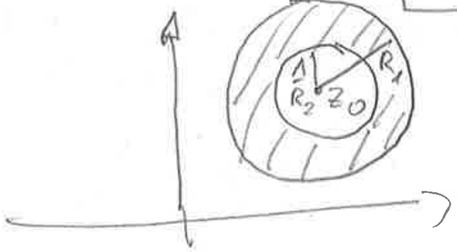
- Wann konvergieren diese?

f_1: wenn $|z-z_0| < R_1 = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_j}{a_{j+1}}\right|$

f_2: wenn $\frac{1}{|z-z_0|} < R_2 = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_{-j}}{a_{-(j+1)}}\right|$

$\iff \frac{1}{R_2} < |z-z_0|$

$f(z)$ konvergiert nur wenn f_1 und f_2 beide konvergieren, das geht nur wenn $\boxed{\frac{1}{R_2} < R_1}$



d.h. auf einem Kreisring. Dabei sind möglich:

$R_1 = \infty \Rightarrow$

und $\frac{1}{R_2} = 0 \Rightarrow$

punktiert

($R_2 = \infty$, z.B. wenn nur endlich viele $a_{-n} \neq 0$)

- Innerhalb des Kreisrings ist $f(z)$ analytisch und kann termweise abgeleitet werden: $f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(a_k (z-z_0)^k\right)' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$

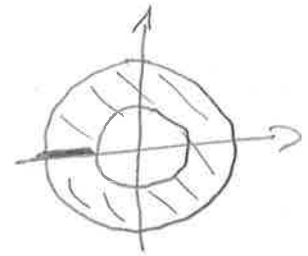
umgekehrt können wir zu einer gegebenen Laurentreihe die "Stammfunktion" raten:

$$\text{z.B.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \frac{d}{dz}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^{n+1}}{(n+1)} + \sum_{n=-2}^{-\infty}\frac{a_n z^{n+1}}{(n+1)} + a_{-1}\log(z)\right)}_{g(z)}$$

wegen $(z^n)' = n z^{n-1} \; \forall n \in \mathbb{Z}$ und $\log(z)' = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow$ die Rolle vom Koeffizienten a_{-1} ist eine besondere, dieser heißt Residuum.

Unser $g(z)$ ist nun auf einem geschlitzten Kreisring definiert, durch den Logarithmus



Pole und wesentliche Singularitäten

Wie wir bei den Laurent-Reihen oder auch bei Wurzeln und dem Logarithmus gesehen haben, sind analytische Funktionen d.h. auf punktierten oder geschlitzten Gebieten definiert. Wir unterscheiden folgende Situationen:

"Isolierte Singularitäten"

- Der Punkt z_0 ist ein isolierter Pol von $f(z)$, falls f nicht in z_0 aber in der punktierten Umgebung von z_0 analytisch ist.
- Wenn $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ durch eine Laurent-reihe gegeben

  mit $N>0$ $\quad = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}} + \ldots$ heißt z_0 N-facher Pol

  d.h. $(z-z_0)^N f(z)$ hat eine hebbare Singularität und ist analytisch fortsetzbar in z_0
- Eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch ist, d.h. keine Singularitäten hat heißt ganze Funktion (z.B. Polynome, e^z)