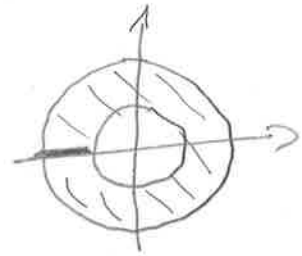
umgekehrt können wir zu einer gegebenen Laurentreihe die "Stammfunktion" raten:

z.B. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \frac{d}{dz}\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^{n+1}}{(n+1)} + \sum_{n=-2}^{-\infty}\frac{a_n z^{n+1}}{(n+1)} + a_{-1}\log(z)}_{g(z)}\Big)$$

wegen $(z^n)' = n z^{n-1} \ \forall n \in \mathbb{Z}$ und $\log(z)' = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow$ die Rolle vom Koeffizienten a_{-1} ist eine besondere, dieser heißt Residuum.

Unser $g(z)$ ist nun auf einem geschlitzten Kreisring definiert, durch den Logarithmus



Pole und wesentliche Singularitäten

Wie wir bei den Laurent-Reihen oder auch bei Wurzeln und dem Logarithmus gesehen haben, sind analytische Funktionen i.A. auf punktierten oder geschlitzten Gebieten definiert. Wir unterscheiden folgende Situationen:

* "Isolierte Singularitäten"

- Der Punkt z_0 ist eine isolierte Singularität von $f(z)$, falls f nicht in z_0 aber in der punktierten Umgebung von z_0 analytisch ist.
- Wenn $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ durch eine Laurent-Reihe gegeben

mit $N>0$ $$= \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}} + \dots$$ heißt z_0 N-facher Pol

d.h. $(z-z_0)^N f(z)$ hat eine hebbare Singularität und ist analytisch fortsetzbar in z_0

- Eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch ist, d.h. keine Singularitäten hat heißt ganze Funktion (z.B. Polynome, e^z)

• Wenn $f(z)$ endlich viele isolierte Pole hat in $\mathbb{C}$ heißt sie meromorph (z.B. die obige Laurent-Reihe)

• Wenn die Ordnung N des Pols bei z_0 gegen ∞ geht handelt es sich um eine wesentliche Singularität, z.B. $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}$ hat bei $z=0$ eine solche —"—. (diese ist auch isoliert) Es ist dann $(z-z_0)^k f(z)$ singulär bei z_0 $\forall k \in \mathbb{N}$ (also hier $z^k \cdot e^{\frac{1}{z}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$).

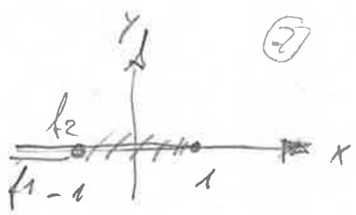
• das Verhalten von $f(z)$ bei $z=\infty$ kann durch das Verhalten von $f\left(\frac{1}{w}\right)$ bei $w=0$ untersucht werden:

Bsp: $\cos(z)$ bei $z \to \infty$: $\cos\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{w^{2n}}$ hat bei $w=0$ (d.h. bei $z \to \infty$) eine wesentliche Singularität (Grund: $\cos z$ wächst exponentiell für $z = iy$, $y \to \infty$).

• Die einzige Funktion, die auf der fortgesetzten Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ analytisch ist ist $f(z) = \text{const}$.

"Eindimensionale Singularitäten"

• wie wir gesehen haben sind $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ oder $f(z) = \log(z)$ nur auf der geschlitzten Halbebene definiert, d.h. sie sind auf ganz $\mathbb{R}_-$ singulär. Es gibt aber auch Fktn, die auf einem endlichen Schnitt singulär sind (s. auch $g(z)$, S. 29).



Bsp: $f(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{(z+1)^{\frac{1}{2}}}_{f_1(z)} \underbrace{(z-1)^{\frac{1}{2}}}_{f_2(z)}$,

Es ist $f(z)$ nur auf dem reellen Intervall $[-1,+1]$ singulär, denn für $z \to \infty$ ($\frac{1}{w}$, $w \to 0$):

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \left(\frac{1}{w^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{w}\left(1-w^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{w}\left(1 - \frac{1}{2}w^2 + O(w^4)\right)$$
$$= \frac{1}{w} - \frac{1}{2}w + O(w^2)$$ hat einen einfachen Pol bei $w=0$

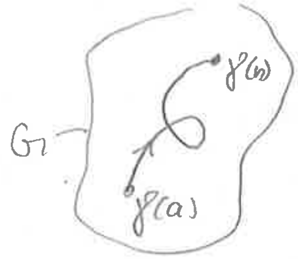
Durch überprüfen ergibt sich, daß durch Umlaufen des Wurzelschnittes bei $[-1,1]$ eine eindeutige Fkt. entsteht. ("—"— hebt sich weg")

I.5 Komplexe Integration [Arfken 6.3]

· Grundbegriffe:

Im Folgenden betrachten wir fast ausschließlich komplexe Kontur-Integrale entlang einer Kurve $\int_{\gamma}$ $\int_{\gamma}$ und nicht Integrale über zweidimensionale Teilmengen $\int_G d^2z$.

Ein wichtiges Ergebnis wird sein, daß für analytische Funktionen das Integral nicht vom Weg sondern nur von den Endpunkten abhängt. Den Zusammenhang bzw. die Interpretation als eine konservative Kraft folgt.



Def: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma: \begin{cases} [a,b] \to G \\ t \to \gamma(t) \end{cases}$ ein darin verlaufender, stetig differenzierbarer Weg, und $f: \begin{cases} G \to \mathbb{C} \\ z \to f(z) \end{cases}$ eine stetige, komplexwertige Funktion.

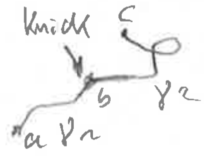
Dann def. wir $\boxed{\int_\gamma dz\, f(z) := \int_a^b dt\, \dot\gamma(t)\, f(\gamma(t)) = \int_a^b dt \frac{dz}{dt} f(z)}$

(Substitution in $\mathbb{R}$: hängt nicht von Parametrisierung ab: $t \to s(t)$ $= \int_a^b ds \frac{dt}{ds}\frac{d\gamma}{dt} f(\gamma(t)) = \int_a^b ds \frac{d\gamma}{ds} f(\gamma(s))$)

Bemerkungen: 1. Wenn wir $\gamma(t) = z(t) = x(t) + i y(t)$, $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ schreiben wird es ersichtlich, daß das Integral aus 2 gewöhnliche reellen Int. besteht:

$$\int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)(u + iv) = \int_a^b dt\left(\frac{dx}{dt}u - \frac{dy}{dt}v\right) + i\int_a^b dt\left(\frac{dx}{dt}v + \frac{dy}{dt}u\right)$$

2. wir können Integrale über aneinander anschließende Wege zusammensetzen



$$\int_{\gamma_1} dz\, f + \int_{\gamma_2} dz\, f = \int_a^b dt\, \dot\gamma_1 f(\gamma_1) + \int_b^c dt\, \dot\gamma_2 f(\gamma_2) = \int_a^c dt\, \dot\gamma f(\gamma) = \int_\gamma dz\, f(z)$$

d.h. stückweise stetig diffbare Wege sind möglich in obiger Def

· Ein paar Namen: einfacher Weg: schneidet sich nicht, geschlossen

Lemma. Sei $f(z)$ eine analytische Funktion auf Gebiet G, die auf einem Teilgebiet $U \subseteq G$ eine Stammfunktion F hat, d.h. $\forall z \in U\ F'(z) = f(z)$.
Dann gilt für stückweise stetig diff'bare Wege $\gamma : [a,b] \to U$

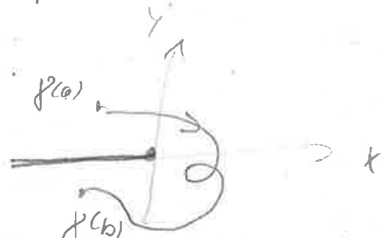
dies ist noch nicht das Haupt-ergebnis für $\int$ in $\mathbb{C}$

$$\boxed{\int_\gamma dz\, f(z) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}$$

Beweis
$$= \int_a^b dt\, \dot\gamma(t)\, f(\gamma(t)) = \int_a^b dt \frac{d\gamma}{dt} \left.\frac{dF}{dz}\right|_{z=\gamma(t)} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b dt \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = $$

* D.h. das Integral hängt dann nicht vom Weg sondern nur von den Endpunkten ab!

Beispiel: Es ist $f(z) = \frac{1}{z}$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Seine Stammfunktion $F(z) = \log(z)$ ist allerdings nur auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}_-\}$ definiert, d.h. wir können mit obiger Methode nur solche Integrale berechnen, die $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_-\}$ erfüllen.

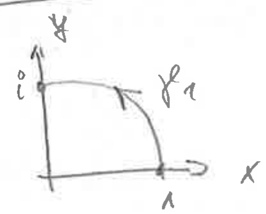


Beispiele für Integrale über verschiedene Wege mit gleichen Anfangs- u. Endpunkten

① $f(z) = (z^*)^2$: (ist nicht analytisch)

$\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = 0 - i1$

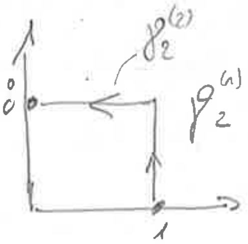
1. Weg



$$\gamma_1 : \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & \to \mathbb{C} \\ \varphi & \to e^{i\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int d\varphi\, \dot\gamma(\varphi)\, (\gamma^*)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, i e^{i\varphi} \left(e^{-i\varphi}\right)^2 = \left[-e^{-i\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = i + 1$$

2. Weg



$\gamma_2 = \gamma_2^{(1)} \cup \gamma_2^{(2)}$

$$\gamma_2^{(1)} : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{C} \\ t & \to 1 + it \end{cases}, \quad \gamma_2^{(2)} : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{C} \\ t & \to (1-t) + i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} dz\, f(z) = \int_0^1 dt\, (i)(1 - it)^2 + \int_0^1 dt\, (-1)((1-t) - i)^2 =$$

$$= i\int_0^1 dt\,(1-2it-t^2) - \int_0^1 dt\,(\cancel{1}-2t+t^2-2i(1-t)-\cancel{1})$$

$$= i\left[t-it^2-\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 - \left[-2it+(i-1)t^2+\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

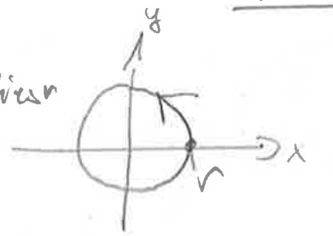
$$= i\left(1-i-\tfrac{1}{3}\right) - \left(-2i+(i-1)+\tfrac{1}{3}\right) = i\left(\tfrac{2}{3}-i\right) - \left(-i-\tfrac{2}{3}\right) = \underline{\tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{3}i}$$

$$\neq 1+i$$

d.h. das Integral hängt vom Weg ab!

② als 2. Beispiel betrachten wir $\underline{f(z)=z^n}$, $n\in\mathbb{N}$ welches analytisch ist in $\mathbb{C}$

1. Weg Kreis mit Radius r (geschlossener Weg)

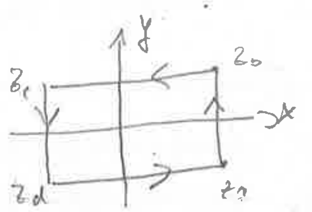


$$\gamma_1 : \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ \varphi \to re^{i\varphi} \end{cases}, \quad r>0$$

$$\Rightarrow \underline{\int_{\gamma_1} dz\, f(z)} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, ire^{i\varphi} r^n e^{in\varphi} = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n+1)\varphi} = ir\left[\frac{1}{n+1}e^{i(n+1)\varphi}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0 \quad (n\neq -1)$$

2. Weg Rechteck bzw. Polygon



$$\gamma_2^{(1)}(t) = z_a + t(z_b-z_a) \qquad t\in[0,1]$$

$$\gamma_2^{(2)}(t) = z_b + t(z_c-z_b) \qquad \text{— " —}$$

etc.

$$\Rightarrow \underline{\int_{\gamma_2} dz\, f(z)} = \int_0^1 dt\, \underbrace{(z_b-z_a)\, z^n\big|_{z=z_a+t(z_b-z_a)}}_{\frac{1}{n+1}(z^{n+1}(t))^{\cdot}} \quad \leftarrow \text{ benutze Lemma}$$

$$+ \int_0^1 dt\,(z_c-z_b)\, z_1^n \ldots + \int_0^1 dt\,(z_d-z_c)\, z_1^n \ldots + \int_0^1 dt\,(z_a-z_d)\, z_1^n \ldots$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}\left(z_a+t(z_b-z_a)\right)^{n+1}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{n+1}\left(z_b+t(z_c-z_b)\right)^{n+1}\right]_0^1$$

$$+ \left[\frac{1}{n+1}\left(z_c+t(z_d-z_c)\right)^{n+1}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{n+1}\left(z_d+t(z_a-z_d)\right)^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(z_b^{n+1}-z_a^{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}\left(z_c^{n+1}-z_b^{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{n+1}\left(z_d^{n+1}-z_c^{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}\left(z_a^{n+1}-z_d^{n+1}\right)$$

$$\underline{= 0 \quad \text{wie über Weg 1 !}}$$