$$= i\int_0^1 dt\,(1-2it-t^2) - \int_0^1 dt\,(\cancel{1}-2t+t^2-2i(1-t)-\cancel{1})$$

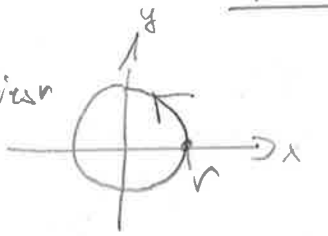
$$= i\left[t - it^2 - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 - \left[-2it+(i-1)t^2+\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= i\left(1-i-\tfrac{1}{3}\right) - \left(-2i+(i-1)+\tfrac{1}{3}\right) = i\left(\tfrac{2}{3}-i\right) - \left(-i-\tfrac{2}{3}\right) = \underline{\tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{3}i} \neq 1+i$$

d.h. das Integral hängt vom Weg ab!

② als 2. Beispiel betrachten wir $f(z) = z^n, n\in\mathbb{Z}, n \neq -1$ welches analytisch ist in $\mathbb{C}$

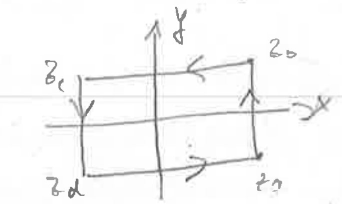
1. Weg: Kreis mit Radius r (geschlossener Weg)



$$\gamma_1 : \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ \varphi \to re^{i\varphi} \end{cases}, \quad r>0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, ire^{i\varphi} r^n e^{in\varphi} = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n+1)\varphi} = ir^{n+1}\left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\varphi}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad (n\neq -1)$$

2. Weg: Rechteck bzw. Polygon



$\gamma_2^{(1)}(t) = z_a + t(z_b - z_a) \qquad t\in[0,1]$

$\gamma_2^{(2)}(t) = z_b + t(z_c - z_b) \qquad$ — " —

etc.

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} dz\, f(z) = \int_0^1 dt\, \underbrace{(z_b-z_a)\, z^n\big|_{z=z_a+t(z_b-z_a)}}_{\frac{1}{n+1}(z^{n+1}(t))^{\cdot}} \quad \leftarrow \text{benutze Lemma}$$

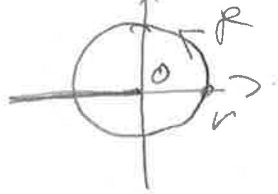
$$+ \int_0^1 dt\,(z_c-z_b)\, z^n + \int_0^1 dt\,(z_d-z_c)\, z^n + \int_0^1 dt\,(z_a-z_d)\, z^n$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(z_a+t(z_b-z_a))^{n+1}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{n+1}(z_b+t(z_c-z_b))^{n+1}\right]_0^1$$
$$+ \left[\frac{1}{n+1}(z_c+t(z_d-z_c))^{n+1}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{n+1}(z_d+t(z_a-z_d))^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(z_b^{n+1}-z_a^{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}\left(z_c^{n+1}-z_b^{n+1}\right)$$
$$+ \frac{1}{n+1}\left(z_d^{n+1}-z_c^{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}\left(z_a^{n+1}-z_d^{n+1}\right)$$

$= 0$ wie über Weg 1 !

• zurück zum Beispiel $f(z) = \frac{1}{z}$: integriert über Kreis mit Radius r



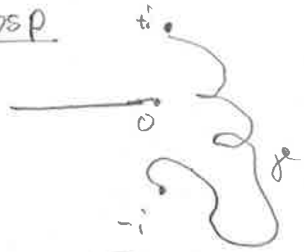
hier können wir nicht das La benutzen

da $F(z) = \log(z)$ nicht entlang des Kreises definiert:

$$\boxed{\int_\gamma dz\, \frac{1}{z}} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, i r e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{re^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{2\pi i}$$ durch direkte Integration.

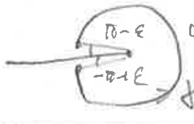
• für andere Wege die den Schnitt nicht kreuzen können wir diese Stammfunktion nutzen, und das Resultat hängt nicht vom Weg ab, z.B.

Bsp



$$\int_\gamma dz\, \frac{1}{z} = \left[\log(z)\right]_{-i}^{i} = \underbrace{\log|i|}_{=0} + i\left(\frac{\pi}{2} + \cancel{2\pi k}\right) - \left(\log|-i| + i\left(-\frac{\pi}{2} + \cancel{2\pi k}\right)\right) = i\pi$$

egal welchen Zweig von log z wir wählen!



$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z} = \left[\log(z)\right]_{re^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{re^{i(\pi-\varepsilon)}} = \log r + i(\pi-\varepsilon) - (\log r - i(\pi-\varepsilon)) = 2\pi i - 2i\varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ ergibt obiges

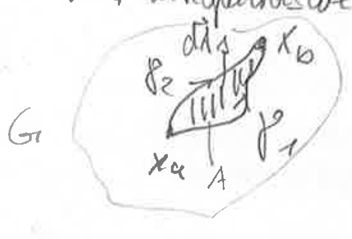
* Beziehung zur konservativen Kraft – Satz von Stokes

• gegeben ein einfach zusammenhängendes Gebiet ("ohne Löcher", siehe S. 6)

d.h. dort läßt sich jede geschlossene Kurve zu einem Punkt zusammenziehen.

Ein konservatives Kraftfeld $\vec F$ erfüllt dort $\vec\nabla \times \vec F = \vec 0$.

Dann ist das Kurven(Linien)integral $V(x) = -\int_{x_a}^{x_b} d\vec s \cdot \vec F(\vec s)$ unabhängig vom Integrationsweg γ



$$\int_{\gamma_1} d\vec s \cdot \vec F - \int_{\gamma_2} d\vec s \cdot \vec F = \oint_\gamma d\vec s \cdot \vec F = \int_{\text{Fläche}} \overset{\perp \text{ zur Fläche}}{d\vec A} \cdot \underbrace{\vec\nabla \times \vec F}_{=\vec 0 \text{ in } G} = 0$$

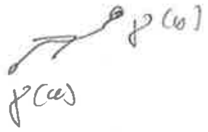
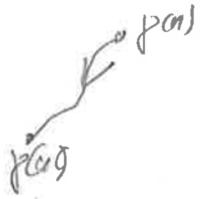
$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ ist geschlossen

Satz von Stokes

* Aussagen zu komplexen Integralen sind aber mehr als Anwendungen des –"–

• Notation: für $\gamma(a) = \gamma(b)$ bezeichnen wir $\int_{\gamma \text{ geschlossen}} dz\, f(z) \equiv \oint_\gamma dz\, f(z)$

wobei nach unserer Konvention gegen den Uhrzeigersinn (pos. Orientierung) durchlaufen wird

Orientierung: es gilt  $= -$  , d.h. $\int_{-\gamma} dz\, f(z) = -\int_{\gamma} dz\, f(z)$

da $\int_a^b dt\, \dot\gamma(t)\, f(\gamma(t)) = -\int_b^a dt\, \dot\gamma(t)\, f(\gamma(t))$

Eine wichtige Konsequenz des Lemmas v. Seite 29. ist:

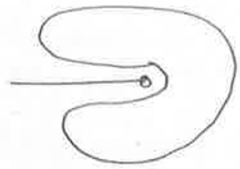
Korollar: Wenn f in G eine Stammfunktion F besitzt so ist für $\gamma \in G$
$\int_\gamma dz\, f(z)$ unabhängig vom Weg γ. Insbesondere gilt

$$\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) = 0}$$ für geschlossene Wege γ die ganz in G liegen.

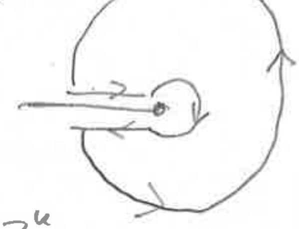
Das Theorem von Goursat ist eine stärkere Version dessen und besagt:

Wenn f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G so gilt für alle geschlossenen γ in G $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$, s. später

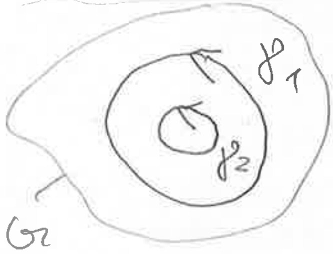
Beispiele: Gebiet mit Schnitt:



d.h. in G einfach zusammenhängend ist $\log(z)$ analytisch, also gilt $\oint_\gamma dz \log(z) = 0$, z.B. für



Gebiet ohne Schnitt: also z.B. Analytizitätsbereich von z^n.



$=$

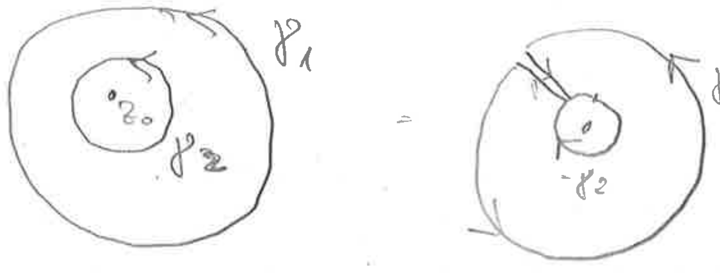
— γ ist geschlossen, d.h.

für f analytisch in G gilt

$$0 = \oint_\gamma dz\, f(z) = \int_{\gamma_1} dz\, f(z) + \int_{-\gamma_3} dz\, f(z) + \int_{-\gamma_2} dz\, f(z) + \int_{\gamma_3} dz\, f(z)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_{\gamma_2} dz\, f(z)} = 0$$

• genauso erhalten wir für ein punktiertes Gebiet $G \setminus \{z_0\}$



$$\int_\gamma dz\, f(z) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_{\gamma_2} dz\, f(z)$$

aber hier i.A. $\neq 0$

I.6. Der Cauchysche Integralsatz und der Residuensatz

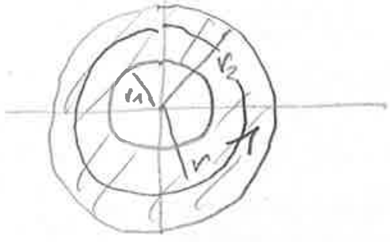
[Arfken 6.3, 6.4, 7.1]

• Wir haben gesehen, daß wenn wir $f(z)$ analytisch in G über 1 geschlossenen Weg γ integrieren, der ganz in einem einfach zusammenhängende $U \subseteq G$ verläuft, in dem $f(z)$ eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$, gilt

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$$

• Diese Aussage kann zu weiteren Wegen und Gebieten verallgemeinert werden.

Beispiel: Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ eine für $r_1 < |z| < r_2$



konvergente Laurentreihe und r gegeben mit $r_1 < r < r_2$, so gilt

Residuum von Laurentreihe $f(z)$

$$\oint_{|z|=r} dz\, f(z) = \oint_{|z|=r} dz\, \frac{a_{-1}}{z} = 2\pi i\, a_{-1}$$

Denn: $f(z)$ ist innerhalb des Konvergenzringes absolut konvergent und kann gliedweise integriert werden

2. Beispiel S. 30, gibt 0 für $n \neq -1$

$$\oint_{|z|=r} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{|z|=r} dz\, z^n = a_{-1} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z} = a_{-1} \cdot 2\pi i$$

S. 31 explizit

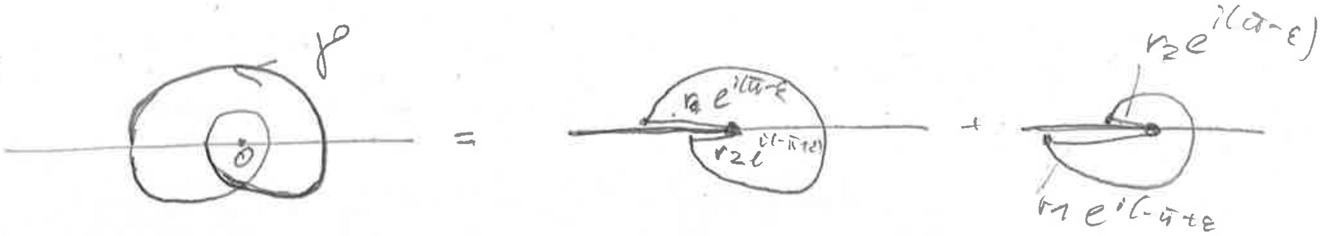
• dieses Beispiel kann man auf $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ verallgemeinert werden

<u>Def</u>: <u>Umlaufzahl</u> - Sei γ eine geschlossene Kurve (gegeben durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg), die nicht den Punkt z_0 enthält. Dann ist

$$\boxed{\nu_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0}}$$ die <u>Umlaufzahl um z_0</u>

Sie gibt an, wie oft γ den Punkt z_0 im positiven Sinn (= entgegen dem Uhrzeigersinn) umläuft.

<u>Bsp.</u>



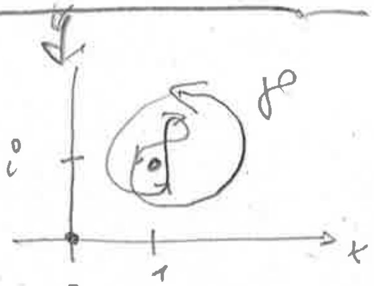
$$\Rightarrow \boxed{\oint_\gamma \frac{dz}{z}} = \log r_1 + i(\pi-\varepsilon) - (\log r_2 + i(-\pi+\varepsilon)) + \log r_2 + i(\pi-\varepsilon) - (\log r_1 + i(-\pi+\varepsilon))$$

$$= 2\pi i - 2i\varepsilon + 2\pi i - 2i\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \boxed{4\pi i}$$

und entsprechend für kompliziertere Wege γ

d.h. die $\log r_k$ heben sich weg, nur die Winkel addieren sich.

Bsp: Integriere $f(z) = \frac{1}{z(z-(1+i))}$ über γ



• Entwickle in Laurentreihe um $z_0 = 1+i$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i+z-(1+i)} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-(1+i)}{(1+i)}\right)} = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-(1+i))^n}{(i+1)^n}$$

Konvergenzradius $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(1+i)^n} \frac{(1+i)^{n+1}}{(-1)^{n+1}} \right| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = R$

d.h. konvergent für $\underline{|z-(1+i)| < \sqrt{2}}$ (normale Potenzreihe)