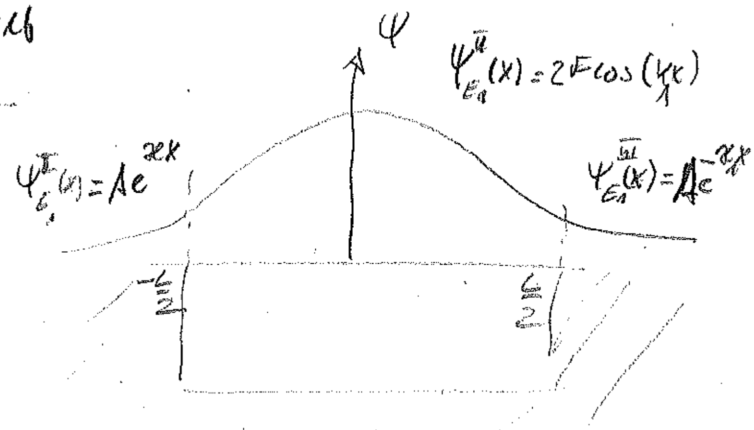
(auch wenn es mehrere Lsg. gibt)

3) die Lösung mit dem kleinsten k_1 und damit der kleinsten Energie E_1 ist immer gerade (Schnitt mit $\tan(\frac{kL}{2})$) und bildet den Grundzustand; sie hat keine Nullstelle (keinen Knoten) da $\boxed{k_1 \frac{L}{2} < \frac{\pi}{2}}$ gilt

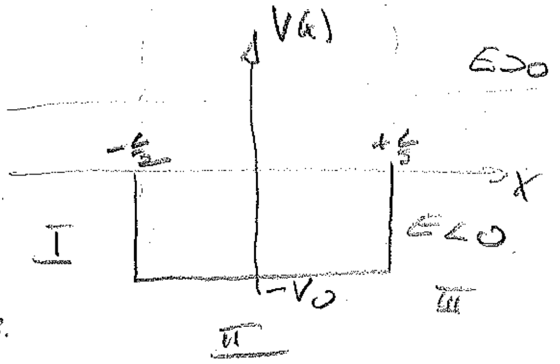


4) auch im klassisch verbotenen Bereich $|x| < \frac{L}{2}$ zu $E<0$ ist $\psi^{I,III}(x) \neq 0$, wenngleich exponentiell klein!

5) ohne Beweis: die Wellenfunktion zu Energie E_l hat l Knoten, $E_1 < E_2 < \ldots < E_l < \ldots < E_n$, und es gilt $\psi_{E_l}(-x) = (-)^l \psi_{E_l}(x)$, d.h. gerade und ungerade ψ wechseln sich ab (siehe graph. Lsg.).

2.2. Streuung am Kastenpotential [Münster 3.2.2.]

Wir betrachten nun mögliche Lösungen der zeitunabh. Schrödi mit $\boxed{E>0}$. Wir erwarten nun keine gebundenen sondern Streuzustände.



Bereich I: $x < -\frac{L}{2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi^I_E(x) = E\psi^I_E(x)$$

wegen $E>0$ ist nun $\boxed{E = +\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} > 0}$

d.h. eine geeignete Parametrisierung ist, $k_0 > 0$

$$\Rightarrow \boxed{(\psi^I_E(x))'' = -k_0^2 \psi^I_E(x)}$$

$$\Rightarrow \text{Ansatz} \quad \boxed{\psi_E^{I}(x) = A e^{ik_0 x} + B e^{-ik_0 x}}$$

$$\left(\Rightarrow \psi_E^{I}(x)'' = (ik_0)^2 A e^{ik_0 x} + (-ik_0)^2 B e^{-ik_0 x} = -k_0^2 \psi_E^{I}(x) \right)$$

* beide Lösungen fallen nicht ab für $x \to -\infty$, d.h. wie angekündigt (S. 16) erhalten wir hier keine normierbaren Lösungen. Physikalisch betrachten wir von links (oder rechts) einlaufende ebene Wellen und bestimmen deren Streuung an $V(x)$.

* der zur Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = |\psi|^2$ gehörende Strom $\vec{j}$ (s. S. 10) hat trotzdem eine physikal. sinnvolle Bedeutung:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left[(\vec{\nabla}\psi)\psi^* \right] \qquad \text{(betrachten hier nur Bereich I)}$$

10 $$j^{I} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left[\frac{\partial \psi^{I}}{\partial x} \psi^{I*} \right] = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left[ik_0 \left(A e^{ik_0 x} - B e^{-ik_0 x} \right) \left(A^* e^{-ik_0 x} + B^* e^{+ik_0 x} \right) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\Big[ik_0 \Big\{ \underbrace{(|A|^2 - |B|^2)}_{\text{imaginär}} + \underbrace{A B^* e^{2ik_0 x} - A^* B e^{-2ik_0 x}}_{2i \operatorname{Im} A B^* e^{2ik_0 x} \;\; i\cdot = \text{reell}} \Big\} \Big]$$

$$\Rightarrow \quad j^{I} = \underbrace{\frac{\hbar k_0}{m} |A|^2}_{>0} - \underbrace{\frac{\hbar k_0}{m} |B|^2}_{<0}$$

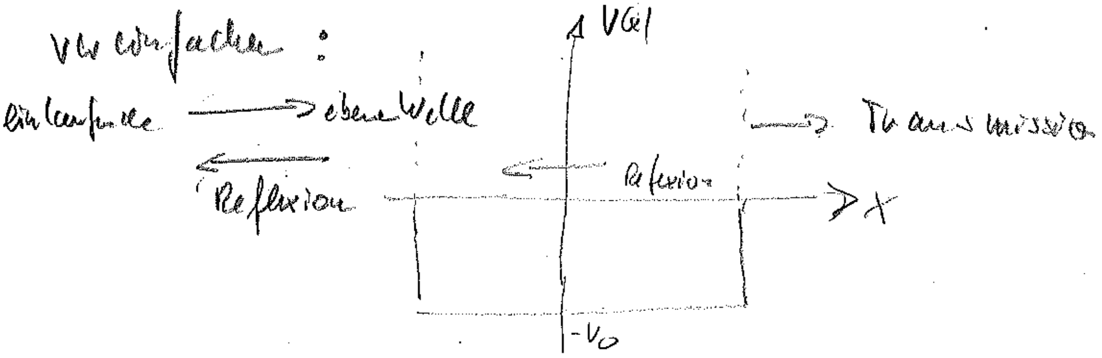
j^I von links einlaufend "nach rechts $\Rightarrow$", j^I nach links auslaufend "$\Leftarrow$"

Bereich III $x > \frac{L}{2}$ genauso, d.h.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_E^{III}(x) = E \psi_E^{III}(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_E^{III}(x)'' = -k_0^2 \psi_E^{III}(x)}$$

$$\text{Ansatz} \quad \boxed{\psi_E^{III}(x) = C e^{ik_0 x} + D e^{-ik_0 x}}$$

Wir betrachten nun folgenden Aufbau, um die Lösung zu vereinfachen:



d.h. wir wählen $D \equiv 0$ im Ansatz

$\Rightarrow$ aus Symmetriegründen können wir dann daraus (mittels Parität $x \to -x$) den Aufbau mit nur von rechts einlaufender Welle lösen:

((das ganze sieht nach einem zeitabh. Prozess aus, wir bestimmen aber nur die sich einstellende stationäre Lsg.!)

Bereich II $\quad -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(\psi_E^{II}(x)\right) - V_0\,\psi_E^{II}(x) = E\,\psi_E^{II}$$

, mit $E \geq 0$ ist $(E+V_0) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ positiv,

$$\Rightarrow \boxed{\left(\psi_E^{II}(x)\right)'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)\,\psi_E^{II}(x) = -k^2\,\psi_E^{II}(x)}$$

wie vorher

Ansatz $\boxed{\psi_E^{II}(x) = F e^{ikx} + G e^{-ikx}}$

* Anschlußbedingungen:

Stetigkeit von $\psi_E(x)$ bei $x = \pm\frac{L}{2}$

(i) $\quad \psi_E^{I}(x=-\frac{L}{2}) = \boxed{A e^{-ik_0\frac{L}{2}} + B e^{+ik_0\frac{L}{2}} \overset{!}{=} F e^{-ik\frac{L}{2}} + G e^{+ik\frac{L}{2}}} = \psi_E^{II}(x=-\frac{L}{2})$

(ii) $\quad \psi_E^{II}(x=+\frac{L}{2}) = \boxed{F e^{ik\frac{L}{2}} + G e^{-ik\frac{L}{2}} \overset{!}{=} C e^{ik_0\frac{L}{2}}} = \psi_E^{III}(x=+\frac{L}{2})$

Stetigkeit der Ableitung $\psi_E(x)'$ bei $x = \pm\frac{L}{2}$:

(iii) $\quad \psi_E^{I}(x=-\frac{L}{2})' = \boxed{ik_0\left(A e^{-ik_0\frac{L}{2}} - B e^{+ik_0\frac{L}{2}}\right) \overset{!}{=} ik\left(F e^{-ik\frac{L}{2}} - G e^{+ik\frac{L}{2}}\right)} = \psi_E^{II}(x=-\frac{L}{2})'$

(iv) $\psi_E^{II}(x=+\frac{L}{2})' = \boxed{ik\left(F e^{ik\frac{L}{2}} - G e^{-ik\frac{L}{2}}\right) \overset{!}{=} ik_0 C e^{ik_0\frac{L}{2}}} = \psi_E^{III}(x=+\frac{L}{2})'$

- Aufgrund der mangelnden Normierbarkeit von $\psi_E(x)$ gibt es hier keine fünfte Gleichung, d.h. es gibt eine globale unbest. Konstante in den Normierungen A, B, C, F, G. Außerdem fehlt eine weitere Gleichung, um die Energie E festzulegen, d.h. wir erwarten ein Kontinuum von Lösungen für E.

* Bestimmung von F und G aus (ii) und (iv):

$ik\text{(ii)}+\text{(iv)}: \quad 2ikF e^{ik\frac{L}{2}} = i(k+k_0)\, C e^{ik_0\frac{L}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad F = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0}{k}\right) C e^{i(k_0-k)\frac{L}{2}}$$

$ik\text{(ii)}-\text{(iv)}: \quad 2ikG e^{-ik\frac{L}{2}} = i(k-k_0)\, C e^{ik_0\frac{L}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad G = \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_0}{k}\right) C e^{i(k_0+k)\frac{L}{2}}$$

* Bestimmung von A und B aus (i) und (iii):

$k\cdot\text{(i)}$ umd oben: $\quad k\left(A e^{-ik_0\frac{L}{2}} + B e^{+ik_0\frac{L}{2}}\right) = \frac{C}{2}\left((k+k_0)\, e^{i(\frac{k_0}{2}-k)L} + (k-k_0)\, e^{i(\frac{k_0}{2}+k)L}\right)$

$\frac{1}{i}\cdot\text{(iii)}: \quad k_0\left(A e^{-ik_0\frac{L}{2}} - B e^{+ik_0\frac{L}{2}}\right) = \frac{C}{2}\left((k+k_0)\, e^{i(\frac{k_0}{2}-k)L} - (k-k_0)\, e^{i(\frac{k_0}{2}+k)L}\right)$

$$\Rightarrow \quad 2A e^{-ik_0\frac{L}{2}} = \frac{C}{2}\left[\left(2+\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right) e^{i(\frac{k_0}{2}-k)L} + \left(2-\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right) e^{i(\frac{k_0}{2}+k)L}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{C}{4} e^{ik_0 L}\Big[2\underbrace{\left(e^{ikL}+e^{-ikL}\right)}_{2\cos kL} + \left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\underbrace{\left(e^{-ikL}-e^{ikL}\right)}_{(-2i)\sin kL}\Big]$$

$$= C e^{ik_0 L}\left[\cos(kL) - \frac{i}{2}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\sin(kL)\right]$$

dito Bestimmung von $B = \ldots$ ($\rightarrow$ Ü4.)

Definiere

den Transmissionskoeffizienten $T = \dfrac{|\vec{j}(x > \frac{L}{2}, \text{rechts})|}{|\vec{j}(x < -\frac{L}{2}, \text{rechts})|}$

d.h. hier, s. S. 30 $\quad T = \dfrac{|j^{III}(\rightarrow)|}{|j^{I}(\rightarrow)|} = \dfrac{\frac{\hbar k_0}{m}|C|^2}{\frac{\hbar k_0}{m}|A|^2} = \underline{\dfrac{|C|^2}{|A|^2}}$

sowie

den Reflexionskoeffizienten $R = \dfrac{|\vec{j}(x < -\frac{L}{2}, \text{links})|}{|\vec{j}(x < -\frac{L}{2}, \text{rechts})|}$

d.h. hier s. S. 30 $\quad R = \dfrac{|j^{I}(\leftarrow)|}{|j^{I}(\rightarrow)|} = \dfrac{\left|-\frac{\hbar k_0}{m}|B|^2\right|}{\left|\frac{\hbar k}{m}|A|^2\right|} = \underline{\dfrac{|B|^2}{|A|^2}}$

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{|A|^2}{|C|^2} = \left[\cos(kL) - \frac{i}{2}\left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right)\sin(kL)\right]\left[\cos(kL) + \frac{i}{2}\left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right)\sin(kL)\right]$$

$$= \cos^2(kL) + \frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right)^2}_{\frac{k_0^2}{k^2} + 2 + \frac{k^2}{k_0^2} \pm 2}\sin^2(kL) = \underbrace{\cos^2(kL) + \sin^2(kL)}_{1} + \frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)^2 \sin^2(kL)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)\frac{1}{2}\sin(kL)\right)^2}} \quad \text{, d.h.} \quad 0 \leq T \leq 1$$

In Ü4 wird gezeigt, daß gilt

$$R = \frac{\left[\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)\frac{1}{2}\sin(kL)\right]^2}{1 + \left(\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)\frac{1}{2}\sin(kL)\right)^2} \quad \text{, d.h.} \quad 0 \leq R \leq 1$$

und $\boxed{T + R = 1}$ Also bleibt die Gesamtwahrscheinlichkeit aus reflektiertem und transmittiertem Anteil erhalten!