$$\Rightarrow \frac{1}{z(z-(1+i))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-(1+i))^{n-1}}{(i+1)^{n+1}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(1+i)(z-(1+i))}}_{\hat{=}\, a_{-1} \text{ Residuum}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-(1+i))^{n-1}}{(i+1)^{n+1}}}_{\text{Nebenteil, d.h. nur Potenzen} \geq 0}$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{dz}{z(z-(1+i))} = \underbrace{4\pi i}_{\nu_\gamma(z_0)\cdot 2\pi i}\, a_{-1} = \frac{4\pi i}{1+i}$$

Nachdem bisher bewiesenen dürfen wir dies nur wenn γ innerhalb des Konvergenzradius $|z-(1+i)| < \sqrt{2}$ liegt.

Gilt dies auch allgemeiner? $f(z)$ analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1+i\}$

Partialbruchzerlegung: $f(z) = \frac{1}{z(z-(1+i))} = \frac{a}{z} + \frac{b}{(z-(1+i))}$

$$= \frac{a(z-(1+i)) + bz}{z(z-(1+i))} \quad \text{mit } a = -b \text{ und } a = \frac{-1}{1+i}$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma dz\, f(z) = \underbrace{\oint_\gamma dz\, \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{(1+i)}\right)}_{=0} + \oint_\gamma dz\, \frac{1}{z-(1+i)} \cdot \frac{1}{(1+i)} = \nu_\gamma(z_0)\, 2\pi i\, \frac{1}{(1+i)}$$

$$= \frac{4\pi i}{1+i}$$

$= 0$ da $\frac{1}{z}$ im einfach zusammenhängendes Gebiet U das γ enthält eine Stammfkt $\log(z)$ hat.

$\rightsquigarrow$ die Verallgem. scheint möglich zu sein

Der Cauchysche Integralsatz

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch, und γ eine geschlossene Kurve in G, die keinen nicht zu G gehörenden Punkt umläuft (d.h. $\nu_\gamma(p)=0 \ \forall p \in \mathbb{C}-G$).

Dann gilt $\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) = 0.}$

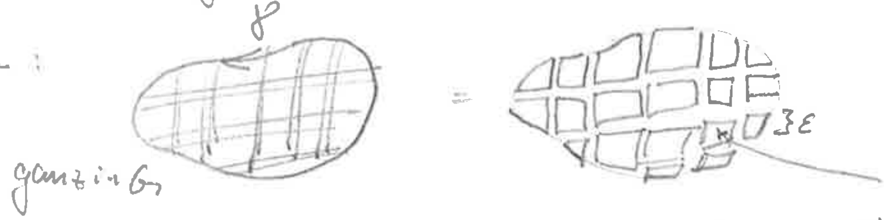
Bemerkung: Hier wird nicht mehr vorausgesetzt, daß f eine Stammfunktion hat, oder f eine konvergente Laurentreihe ist, d.h. dies ist eine echte Verallgemeinerung.

Bsp $f(z)=\frac{1}{z}$ ist analytisch auf $G=\mathbb{C}-\{0\}$, d.h. obiges gilt nur für Wege γ, die nicht $z=0$ enthalten und ganz in G liegen, also z.B.

. Wenn γ $z=0$ enthält gilt der obige Satz nicht!
(und wir wissen was herauskommt: $\nu_\gamma(0)\cdot 2\pi i$)

Beweisidee von Goursat:

Wegen $\int_{-\gamma} dz\, f(z) = -\int_\gamma dz\, f(z)$ können wir ein Netz vieler Hin- und Rückwege einfügen:



und auf jeder Masche

$z_0 \in$ Masche

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + O((z-z_0)^2)$$

→ die konstante Funktion $f(z_0)$ und die lineare Fkt haben Stammfkt, d.h. $\int_{\square} dz\, f(z) = 0 + O(z-z_0)^2$

Man kann zeigen, daß Fehlerterme im Limes kleiner Maschen verschwinden:

Abschätzung: Fläche pro Masche $\sim \varepsilon^2$, Anzahl $\sim \frac{1}{\varepsilon^2}$, Umfang $\sim \varepsilon$

Nun wird jedes Maschenintegral noch durch das ML Lemma abgeschätzt $\left|\int_\gamma dz\, f(z)\right| \le |f|_{max}\cdot L$ wobei L die Länge von γ und $|f|_{max}$ der maximale Betrag von $f(z)$ entlang γ ist.

$\Rightarrow$ Gesamtbeitrag zu $\oint_\gamma dz\, f(z) \sim \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot \varepsilon \cdot O(\varepsilon^2) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

ML Lemma: Sei $f(z)$ stückweise stetig auf dem Weg $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$.
Mit L bezeichnen wir die Länge des Weges γ, d.h.

$L = \int_a^b dt\, |\dot{\gamma}(t)|$. Wenn es eine positive Konstante $M > 0$

gibt, so daß $|f(z)| \leq M$ ist für alle $z \in \gamma(t)$, dann

gilt $\qquad \left| \int_\gamma dz\, f(z) \right| \leq ML.$

Beweis: Sei $g(t)$ eine komplexwertige Funktion $: [a,b] \to \mathbb{C}$.
(Wir benötigen dies für $\int_\gamma dz\, f(z) = \int_a^b dt\, \underbrace{\dot{\gamma}(t)\, f(\gamma(t))}_{= g(t)}$.)

Dann ist $\int_a^b dt\, g(t) = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ der (komplexe) Wert dieses Integrals

$$\Leftrightarrow \quad r = \int_a^b dt\, e^{-i\theta} g(t) \underset{\substack{\uparrow \\ r \geq 0 \text{ reell}}}{=} \operatorname{Re} \int_a^b dt\, e^{-i\theta} g(t) = \int_a^b dt \left(\cos\theta \operatorname{Re} g(t) + \sin\theta \operatorname{Im} g(t) \right)$$

Eigenschaft reeller Integrale $\Rightarrow$

$$0 \leq r = \left| \int_a^b dt (\cos\theta \operatorname{Re} g + \sin\theta \operatorname{Im} g) \right| \leq \int_a^b dt\, \underbrace{\left| \cos\theta \operatorname{Re} g(t) + \sin\theta \operatorname{Im} g(t) \right|}_{(\cos\theta, \sin\theta) \cdot \binom{\operatorname{Re} g(t)}{\operatorname{Im} g(t)}}$$

Δ-Ungl.

$$\leq \int_a^b dt\, \underbrace{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}_{\leq 1} \sqrt{\operatorname{Re}^2 g + \operatorname{Im}^2 g} = \int_a^b dt\, |g(t)| \qquad \text{Norm } \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma dz\, f(z) \right| = \left| \int_a^b dt\, \underbrace{f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)}_{\text{wähle als } g(t)} \right| \leq \int_a^b dt\, |f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)| = \int_a^b dt\, \underbrace{|f(\gamma(t))|}_{\leq M} \cdot |\dot{\gamma}(t)|$$

$$\leq M \int_a^b dt\, |\dot{\gamma}(t)| = ML.$$

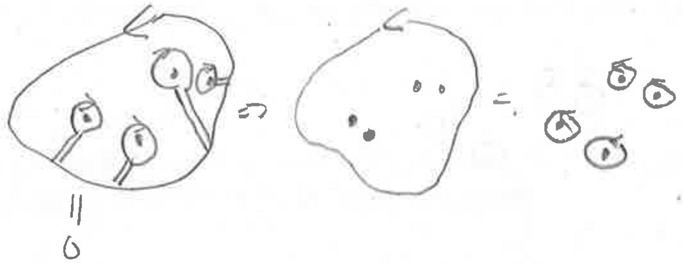
* Der Cauchysche Integralsatz kann noch verallgemeinert werden, indem wir isolierte Singularitäten in G erlauben, und diese vom Weg γ, über den wir integrieren, eingeschlossen sein dürfen

Der Residuensatz: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch bis auf isolierte Singularitäten und γ eine geschlossene Kurve in G, die keine dieser isolierten Singularitäten enthält und keinen Punkt des Komplements von G umläuft. Dann gilt:

$$\boxed{\int_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{\substack{p\in G\\ \text{isolierte Sing.}}} \nu_\gamma(p)\, \mathrm{Res}_p f}$$

wobei $\boxed{\mathrm{Res}_p f := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, f(z)}$ das Residuum von f am Pol z_p ist (hierbei ist ε so klein gewählt, dass der Kreis $|z-z_p|=\varepsilon$ nur die eine isolierte Singularität enthält. Da diese alle isoliert sind ist das möglich)

Begründung: i) Benutze den Cauchyschen Integralsatz, um alle isolierten Pole auszuschneiden:



Summe über alle enthaltene isolierten Singularitäten (evtl. mit Multiplizitäten $\nu_\gamma(p)$)

ii) Aus demselben Grund ist

$= \oint_{|z-z_p|} dz\, f(z)$ unabhängig von ε (wenn klein genug gewählt, s.o.), und damit ist $\mathrm{Res}_p f$ eine wohldef. Zahl.

iii) Wenn ε klein genug (kein anderer Pol enthalten) gibt es eine Laurentreihe um z_p die konvergiert, und

$$\mathrm{Res}_p f = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\,(z-z_p)^n = \frac{a_{-1}}{2\pi i}\oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, \frac{1}{(z-z_p)} = a_{-1}$$

Deswegen die Abkürzung $\mathrm{Res}_p(f)$ für das Residuum von $f(z)$ in z_p.