Definiere

den Transmissionskoeffizienten $T \equiv \dfrac{|\vec{j}(x > \frac{a}{2}, \text{rechts})|}{|\vec{j}(x < -\frac{a}{2}, \text{rechts})|}$

d.h. hier, s. S. 30 $\quad \underline{T} = \dfrac{|j^{III}(\rightarrow)|}{|j^{I}(\rightarrow)|} = \dfrac{\frac{\hbar k_0}{m}|C|^2}{\frac{\hbar k_0}{m}|A|^2} = \underline{\dfrac{|C|^2}{|A|^2}}$

sowie

den Reflexionskoeffizienten $\quad R = \dfrac{|\vec{j}(x < -\frac{a}{2}, \text{links})|}{|\vec{j}(x < -\frac{a}{2}, \text{rechts})|}$

d.h. hier s. S. 30 $\quad \underline{R} = \dfrac{|j^{I}(\leftarrow)|}{|j^{I}(\rightarrow)|} = \dfrac{|-\frac{\hbar k_0}{m}|B|^2|}{|\frac{\hbar k_0}{m}|A|^2|} = \underline{\dfrac{|B|^2}{|A|^2}}$

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{|A|^2}{|C|^2} = \left[\cos(ka) - \frac{i}{2}\left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right)\sin(ka)\right]\left[\cos(ka) + \frac{i}{2}\left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right)\sin(ka)\right]$$

$$= \cos^2(ka) + \frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0}\right)^2}_{\frac{k_0^2}{k^2} + 2 + \frac{k^2}{k_0^2} \pm 2}\sin^2(ka) = \underbrace{\cos^2(ka) + \sin^2(ka)}_{1} + \frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)^2 \sin^2(ka)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)\frac{1}{2}\sin(ka)\right)^2}} \quad \text{, d.h. } \underline{0 \leq T \leq 1}$$

in Ü4 wird gezeigt, daß gilt

$$R = \frac{\left[\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)\frac{1}{2}\sin(ka)\right]^2}{1 + \left(\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)\frac{1}{2}\sin(ka)\right)^2} \quad \text{, d.h. } 0 \leq R \leq 1$$

und $\boxed{T + R = 1}$. Also bleibt die Gesamtwahrscheinlichkeit aus reflektiertem und transmittiertem Anteil erhalten!

* wir haben alle Konstanten A, B, F, G (aus I, II, III) durch C ausgedrückt, da $\psi_E(x)$ nicht normierbar bleibt diese frei. Sie fällt aber aus T und R raus.

- Was ist mit der Energieabhängigkeit, sind alle Werte von $E>0$ erlaubt bzw gleich?

$\Rightarrow$ betrachten wir $T = T(E)$:

$k_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $\quad k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} > 0$ einsetzen

$$\Rightarrow \left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E+V_0}} - \frac{\sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E}}\right)^2 = \frac{E}{E+V_0} - 2 + \frac{E+V_0}{E} = \frac{E^2 - 2E(E+V_0) + (E+V_0)^2}{E(E+V_0)}$$

$$= \frac{V_0^2}{E(E+V_0)} \xrightarrow[E\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T(E) = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2 kL}}, \quad \text{mit } 0 \le \sin^2(kL) \le 1$$

d.h. asymptotisch gilt $\boxed{\lim_{E\to\infty} T(E) = 1}$

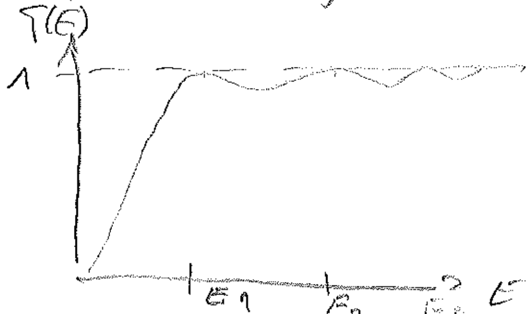
Anschaulich: ein Teilchen das mit $E \gg V_0$ von links kommt spürt den Kasten kaum und wird einfach durchgelassen, ohne Reflexion. Außerdem gilt: $\boxed{\lim_{E\to 0} T(E) = 0}$, d.h. das Teilchen wird reflektiert.

Allerdings ist $T(E) \to 1$ nicht monoton, denn

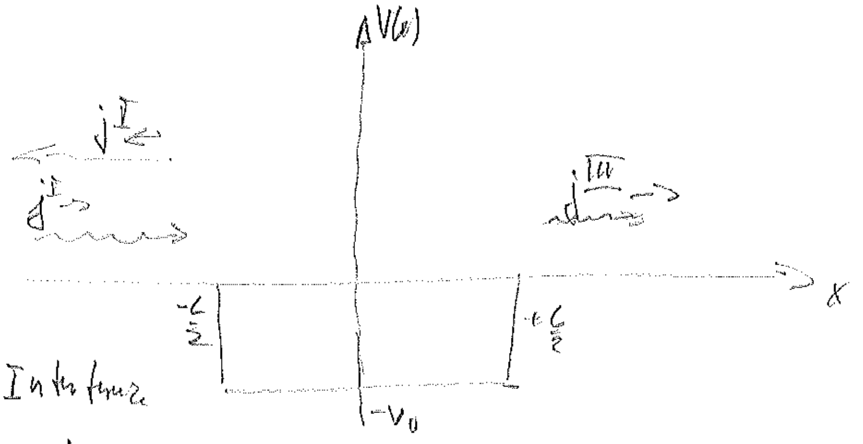
$\forall k$ mit $\boxed{k_n L = n\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$ $\quad$ ($n=0$ nicht möglich wegen $k>0$)

$$\Longleftrightarrow L\sqrt{\frac{2m(E_n+V_0)}{\hbar^2}} = n\pi \Longleftrightarrow \boxed{E_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2m} - V_0}$$

gilt $T(E_n) = 1$ für endliche Energie E_n = Resonanzenergie.



Was passiert bei diesen bestimmten Energien? Die bei $x = +\frac{L}{2}$ und $x = -\frac{L}{2}$ reflektierten Wellen interferieren destruktiv.



$$T(E) = \frac{|j^{III}_{\rightarrow}|}{|j^{I}_{\rightarrow}|}$$

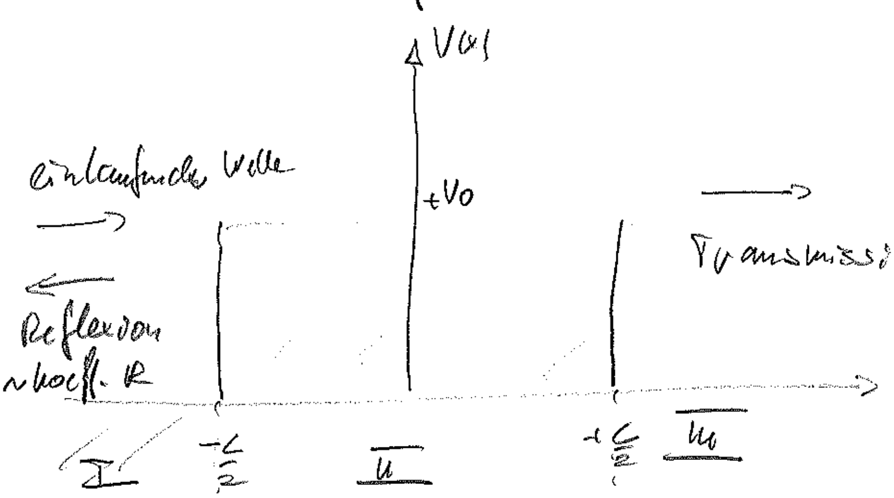
Interferenz

bei $R(E) = \frac{|j^{I}_{\leftarrow}|}{|j^{I}_{\rightarrow}|} = 0$, wenn $E_{n=1,2,..}$ da dann $T(E_n) = 1$ (alles kommt durch).

→ Zusammenfassung

2.3 Die Potentialbarriere und der Tunneleffekt [Münster 3.3, 3.4 Fließbach III.18, III.22]

Wir betrachten nun eine Potentialbarriere (s. auch Ü 4.1.3) anstelle des Kastenpotentials. Wie wir sehen werden können qm. Teilchen solche Barrieren durchtunneln.



← wie bisher betrachtete 3 Bereiche, mit $E>0$.

Klassische Physik: für $E<V_0$ gilt $R=1$ und $T=0$, das Teilchen wird total reflektiert

für $E>V_0$ gilt $R=0$ und $T=1$, d.h. alle Teilchen die Barriere gleichermaßen überwinden.

* Gilt dies auch in der QM? Nein!

Hatten bereits gesehen: 2.1. Teilchen halten sich in klass. verbotenen Bereichen auf für $E<0$, 2.2. auch für $E>0$ gibt es Resonanzeffekte des Potentials

Schrödi (zeitunab.) $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi_E(x) = E\psi_E(x)$, betrachte $V_0 \geq E \geq 0$

- in den Bereichen I und III wie im Kapitel 2.3, dort $V(x)=0$

und präpariere von links einlaufende Welle, d.h.

I $x < -\frac{L}{2}$ $\quad \psi_E^{I}(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x}$, $\boxed{E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} > 0}$ $k_0 > 0$

III $x > +\frac{L}{2}$: $\quad \psi_E^{III}(x) = Ce^{ik_0x}$

II $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$: $\quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_0\right]\psi_E^{II}(x) = E\psi_E^{II}(x)$

$$\Leftrightarrow \psi_E^{II}(x)'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi_E^{II}(x) \quad , \quad \boxed{\varkappa^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} > 0$$

$$= +\varkappa^2\psi_E^{II}(x)$$

d.h. im Vergleich zu vorher $-V_0 \to +V_0$, $-k^2 \to +\varkappa^2$

* d.h. formal können wir alte Lsg. benutzen mit $k \to i\varkappa$, und $\varkappa$ wie oben gegeben
* wir betrachten hier nicht die Bestimmung aller Koeff. der Wellen fkt., sondern sind nur am Transmissions koeffizienten $T(E)$ interessiert.

mit $T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$ benötigen wir die Gl. auf S. 32 unten, mit $k = i\varkappa$:

$$A = \frac{C}{4}e^{ik_0L}\left[2\left(e^{i(i\varkappa)L} + e^{-i(i\varkappa)L}\right) + \left(\frac{k_0}{i\varkappa} + \frac{i\varkappa}{k_0}\right)\left(e^{-i(i\varkappa)L} - e^{i(i\varkappa)L}\right)\right]$$

$$= \frac{C}{4}e^{ik_0L}\left[2\underbrace{\left(e^{-\varkappa L} + e^{+\varkappa L}\right)}_{2\cosh(\varkappa L)} + i\left(\frac{\varkappa}{k_0} - \frac{k_0}{\varkappa}\right)\underbrace{\left(e^{\varkappa L} - e^{-\varkappa L}\right)}_{2\sinh(\varkappa L)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{C}{A} = e^{-ik_0L}\left[\cosh(\varkappa L) + i\left(\frac{\varkappa}{k_0} - \frac{k_0}{\varkappa}\right)\frac{\sinh(\varkappa L)}{2}\right]^{-1}}$$

$$\Rightarrow T(E) = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \left[\cosh^2(\kappa L) + \underbrace{\left(\frac{\kappa}{k_0} - \frac{k_0}{\kappa}\right)^2}_{= \frac{\kappa^2}{k_0^2} - 2 + \frac{k_0^2}{\kappa^2} \pm 2 = \left(\frac{\kappa}{k_0}+\frac{k_0}{\kappa}\right)^2 - 4} \frac{\sinh^2(\kappa L)}{4}\right]^{-1}$$

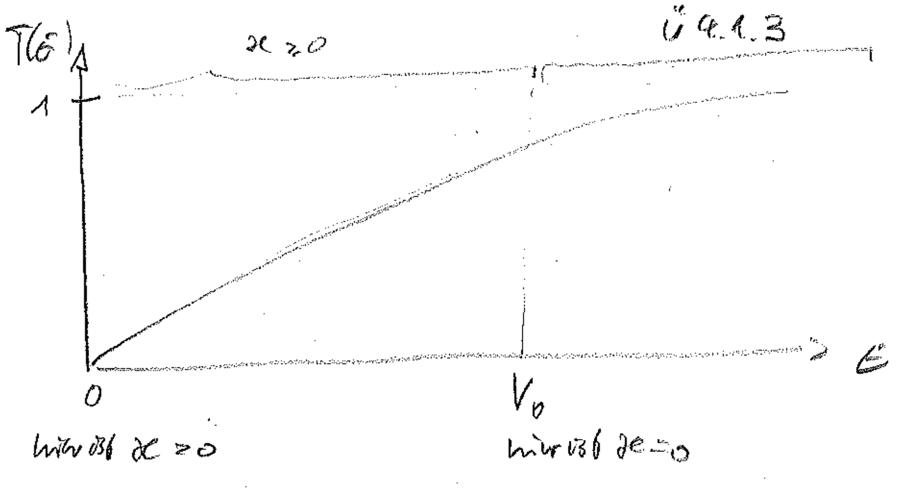
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{T(E) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{\kappa}{k_0}+\frac{k_0}{\kappa}\right)\frac{1}{2}\sinh(\kappa L)\right]^2}}$$

mit κ eingesetzt ergibt sich $\left(\frac{\kappa}{k_0}+\frac{k_0}{\kappa}\right)^2 = \left(\frac{\kappa^2+k_0^2}{k_0\kappa}\right)^2 = \frac{\left(\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)^2}{\frac{2mE}{\hbar^2}\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}$

$$= \frac{V_0^2}{E(V_0-E)}$$

$$\Rightarrow T(E) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{E(V_0-E)}\frac{1}{4}\sinh^2\left(L\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}\right)}$$



D.h. qm ist $T(E) > 0$ auch für $E < V_0$, d.h. trotz Barriere kann das Teilchen hindurchdringen ("durchtunneln"). Dies heißt Tunneleffekt und $T(E)$ wird für $E < V_0$ die Tunnelwahrscheinlichkeit genannt.

* Betrachten wir genauer das Verhalten von $T(E)$ von S.37

<u>für $V_0 \gg E$:</u>

es gilt $\lim\limits_{V_0\gg E} \left(\frac{\varkappa}{k_0}+\frac{k_0}{\varkappa}\right)^2 = \lim\limits_{V_0\gg E}\frac{V_0^2}{E(V_0-E)} \approx \frac{V_0^{2}}{E\,V_0} = \frac{V_0}{E} \gg 1$

$$\Rightarrow \quad \lim_{V_0\gg E} T(E) \approx \frac{1}{\frac{V_0}{E}\,\frac{1}{4}\sinh^2\Big(L\underbrace{\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}}_{\varkappa}\Big)} = \frac{4E}{V_0}\,\frac{1}{\sinh^2(\varkappa L)}$$

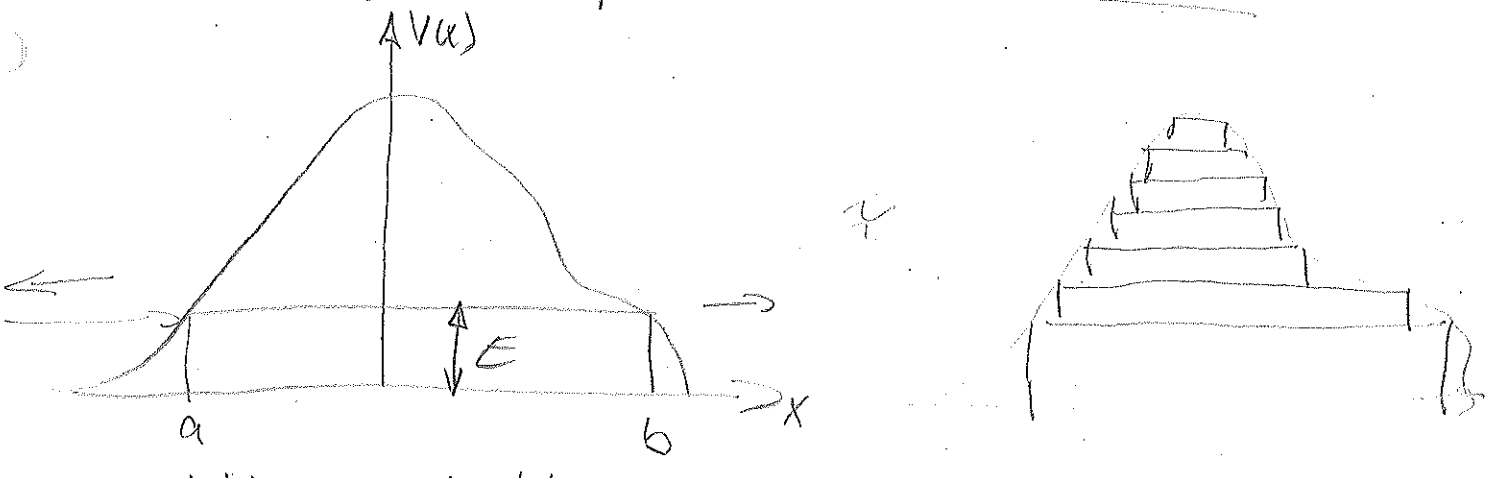
• wegen $\sinh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ gilt wenn <u>zusätzlich $\varkappa L\gg1$</u>: $\sinh(\varkappa L)^2\approx\frac{e^{2\varkappa L}}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\substack{V_0\gg E\\ \varkappa L\gg1}} T(E)\approx \frac{16E}{V_0}\, e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}\,L}} \approx \frac{16E}{V_0}\, e^{-\frac{2\sqrt{2mV_0}}{\hbar}} = \tilde{T}(E)$$

D.h. im <u>klassischen Limes $\hbar\to0$</u> gilt mit $\hbar^{-1}\to\infty$ tatsächlich

$\lim\limits_{\hbar\to0}\tilde{T}(E)=0$, d.h. es findet keine Transmission mehr statt!

• <u>Verallgemeinerung: Tunneleffekt für allgemeinere Potentiale</u>



← klassische Umkehrpunkte

• Näherung: wir approximieren $V(x)$ ab den Umkehrpunkten durch kleine Kastenpotentiale und bilden dann den Limes zu $V(x)$