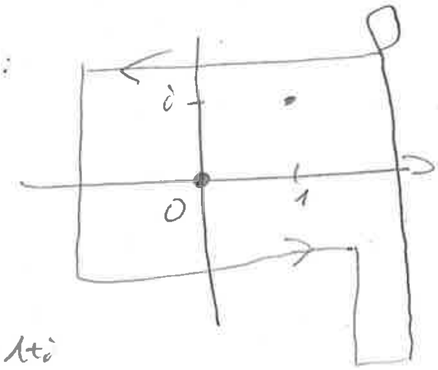
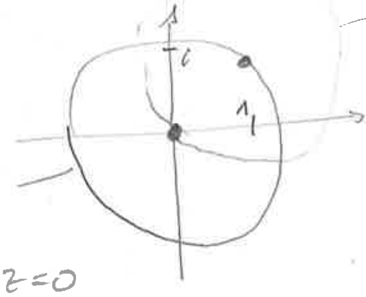
- Zurück zum Beispiel §34 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-(1+i))}$ mit γ:



- die Entwicklung von f in Laurentreihen ist beschränkt durch den nächsten Pol



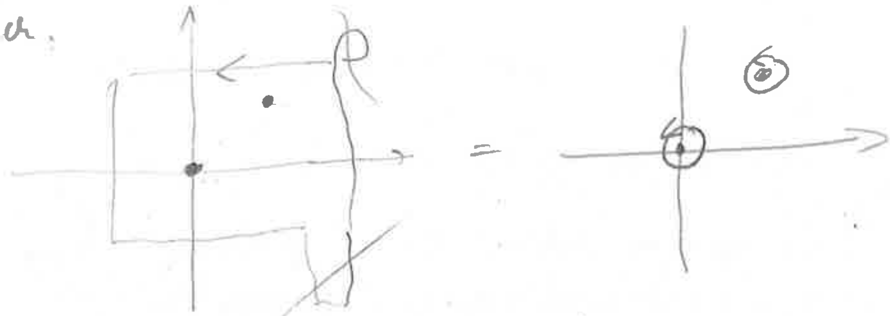
entwickle $\frac{1}{z}$ um $z = 1+i$

und nicht der ganze Weg γ ist enthalten.

entwickle $\dfrac{1}{z-(1+i)}$ um $z=0$

- Stammfunktion wollen wir nicht benutzen wegen der Schnitte.

$\Rightarrow$ Mit dem Residuensatz ist die Berechnung von $\oint_\gamma dz\, f(z) = I$ ganz einfach.



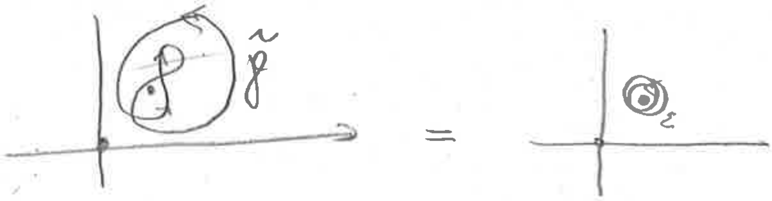
Beitrag bei $z=0$: $$\oint_{|z|=\varepsilon} dz \frac{1}{z\underbrace{(z-(1+i))}_{\text{entwickeln um } z=0 \text{ in Potenzreihe}}} = \frac{1}{-(1+i)} \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{-1-i}$$

Beitrag bei $z=1+i$: $$\oint_{|z-(1+i)|=\varepsilon} dz \frac{1}{(z-(1+i))\, z} = \frac{1}{1+i} \oint_{|z-1-i|=\varepsilon} dz \frac{1}{z-(1+i)} = \frac{2\pi i}{1+i}$$

↑ entwickeln um $z=1+i$ in Potenzreihe

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi i}{-1-i} + \frac{2\pi i}{1+i} = 0$$

- für andere **Wege** kommt nicht unbedingt Null heraus, s. §34



$$\Rightarrow \oint_{\tilde\gamma} \frac{dz}{z(z-1-i)} = \int_{\substack{|z-1-i|=\varepsilon \\ 2x}} \frac{dz}{(z-1-i)z} = \frac{1}{1+i} \cdot 2 \cdot 2\pi i = \frac{4\pi i}{1+i}$$

entwickeln

I.7 Die Cauchy-Formel und weitere Korollare [Arfken 6.4]

Der Residuensatz ist nicht nur für viele praktische Anwendungen wichtig, es lassen sich aus ihm weitere wichtige Integralsätze ableiten.

Die Cauchy-Formel: Sei $f(z)$ in G analytisch und $z_0 \in G$.
Dann ist $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = f(z_0)$, so wie laut Residuensatz

$\oint_\gamma dz \, \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i \, \nu_\gamma(z_0) \, f(z_0)$, mit γ einer geschlossenen Kurve die keinen Punkt außerhalb G's umläuft. Im Folgenden machen wir uns das Leben einfach und nehmen an, daß γ z_0 genau einmal im positiven Sinne umläuft, $\nu_\gamma(z_0) = +1$. Es folgt

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \, \frac{f(z)}{z-z_0}}$$ die Cauchy-Formel.

Beweis: $$\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma \text{ wähle } |z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \, \frac{f(z_0)}{z-z_0} + \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \underbrace{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{g(z)}$$

$g(z)$ hat eine hebbare Singularität bei $z=z_0$, d.h.
$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ex. und damit $\exists\, C>0$ $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}\right| < C$

$\Rightarrow$ ML-Lemma: $\left|\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leq \underbrace{2\pi\varepsilon}_{L} \cdot \underbrace{C}_{M}$ wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein.

$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)$.

• Bemerkungen: Die Werte von $f(z)$ innerhalb von γ, d.h. bei z_0 innerhalb γ beliebig!, lassen sich eindeutig durch Integration von f entlang von γ berechnen.

$f(z_0)$ aus $\oint_\gamma$.

* Wenn z_0 nicht in γ enthalten ist $\oint_\gamma dz \frac{f(z)}{z-z_0} = 0$, da der Integrand analytisch ist.

Die Cauchy-Formel für Ableitungen:

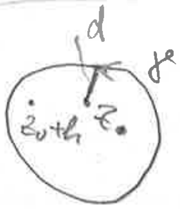
Sei f in G analytisch, $z_0 \in G$ und γ eine geschlossene Kurve, die z_0 umläuft und keine Punkte aus $\mathbb{C} - G$. Der Einfachheit halber sei $\nu_\gamma(z_0) = +1$. Dann gilt:

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}} \quad , n \in \mathbb{N} .$$

Bem: Hier bezeichnet $f^{(n)}(z_0)$ die n-fache Ableitung von $f(z)$ in z_0, d.h. aus der Analytizität von $f(z)$ folgt daß alle Ableitungen

$n \geq 2$ beliebiger Ordnung von $f(z)$ existieren, in jedem $z_0 \in G$! (G war offen)

Beweis für $n = 1$:



Da z_0 innerhalb von γ liegt

für $h \neq 0$ mit $|h|$ klein genug auch $z_0 + h$ innerhalb von γ:

$$\Rightarrow \quad f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{z-z_0}$$

I_1

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{h} \frac{(z-z_0) - (z-z_0-h)}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}$$

Bilden wir nun den limes $h \to 0$ wird die linke Seite zu $f'(z_0)$. Daß die rechte Seite gegen $I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$ konvergiert sehen wir wie folgt mit dem ML-Lemma:

Sei $|f(z)| \leq M$ auf γ, L die Länge von γ, d der kürzeste Abstand von z_0 zu γ (es soll nicht unbedingt $\gamma : |z-z_0| = \varepsilon$ ein Kreis)

$$\Rightarrow |z - z_0| \geq d$$

Dreiecksungleichung: $d \le |z-z_0| \overset{\pm h}{\le} |z-z_0-h| + |h|$

$\Leftrightarrow |z-z_0-h| \ge d - |h| \ge \frac{d}{2}$ da wir natürlich wählen können $|h| \le \frac{d}{2}$ (wegen $h \to 0$)

$$\Rightarrow |I_1 - I_2| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{(z-z_0)} \left(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z_0-h} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint dz f(z) \frac{h}{(z-z_0)^2 (z-z_0-h)} \right| \le \frac{1}{2\pi i} \frac{M |h| \cdot 2}{d^2 \cdot d} L \xrightarrow[h \to 0]{} 0 .$$

hieraus folgt $\boxed{f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}}$

- Der Beweis für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ erfolgt durch Induktion in n, hier muß unter Induktionsannahme für ein $k \in \mathbb{N}$ Folgendes betrachtet werden

$$\frac{f^{(k)}(z_0+h) - f^{(k)}(z_0)}{h} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma dz f(z) \frac{\left((z-z_0)^{k+1} - (z-z_0-h)^{k+1}\right)}{h (z-z_0)^{k+1} (z-z_0-h)^{k+1}}$$

$$\le \frac{\left(1 - \left(1 - \frac{h}{(z-z_0)}\right)\right)^{k+1}}{h (z-z_0-h)^{k+1}} \approx \frac{(k+1) \cancel{h}}{\cancel{h} (z-z_0)(z-z_0-h)^{k+1}}$$

- Mittels ML-Lemma läßt sich dies genauso abschätzen wie oben.

★ Konsequenzen aus Residuensatz und Cauchy für Ableitungen:

{Potenz = Taylor} reihenentwicklung: Sei $f(z)$ analytisch in G und die offene Kreisscheibe $\overset{K_\varrho(z_0)}{|z-z_0| < \varrho}$, $\varrho > 0$ ganz in G. Dann läßt sich $f(z)$ in eine konvergente Potenzreihe entwickeln = Taylorreihe.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in K_\varrho(z_0)} \text{ mit } \boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

mit $0 < \varepsilon < \varrho$.

Beweis: wegen Cauchy gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varrho} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad \forall z \in K_\varrho(z_0)$$

• Entwickle die geometrische Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1 - \frac{(z-z_0)}{(\zeta-z_0)}\right)}, \quad \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$. Diese Reihe ist absolut konvergent

und kann termweise integriert werden ⇒

$$\underline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=s} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}}_{\equiv a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n} .$$

Dies ist nichts anderes als die Taylorreihe!

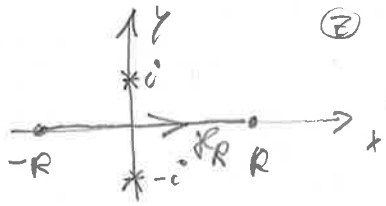
* Die Koeffizienten einer Laurentreihendarstellung von $f(z)$ analytisch lassen sich ebenfalls durch Konturintegrale von $f(z)$ darstellen (s. später)

zunächst ein konkretes Anwendungsbeispiel des Residuensatzes [Ablow 7.1]

• Berechnung von reellen Integralen mittels Residuensatz:

Beispiel (i) $\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{1}{1+x^2}}$ (← dieses uneigentliche Integral ist eigentlich der Grenzwert $\lim_{a,b\to\infty} \int_{-b}^{a} dx \, \frac{1}{1+x^2}$)

("Hauptwert") • Schreibe $I = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$



• wegen $z^2+1 = (z-i)(z+i)$

hat der Integrand $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ einfache Pole bei $z = \pm i$

• um den Residuensatz anzuwenden brauchen wir eine geschlossene Kurve γ. Idee: schließe γ_R so, daß der Beitrag zu I im Limes $R\to\infty$ verschwindet

$\gamma = \alpha_R \cup \gamma_R$