

* Betrachten wir genauer das Verhalten von $T(E)$ von (37)

für $V_0 \gg E$:

es gilt $\lim_{V_0 \gg E} \left(\frac{\partial \ell}{\partial V_0} + \frac{\partial \ell}{\partial E} \right)^2 = \lim_{V_0 \gg E} \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)} \approx \frac{V_0^2}{E V_0} = \frac{V_0}{E} \gg 1$

$\Rightarrow \lim_{V_0 \gg E} T(E) \approx \frac{1}{\frac{V_0}{E} \frac{1}{4} \sinh^2 \left(\frac{2\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \right)} = \frac{4E}{V_0} \frac{1}{\sinh^2(\alpha \ell)}$

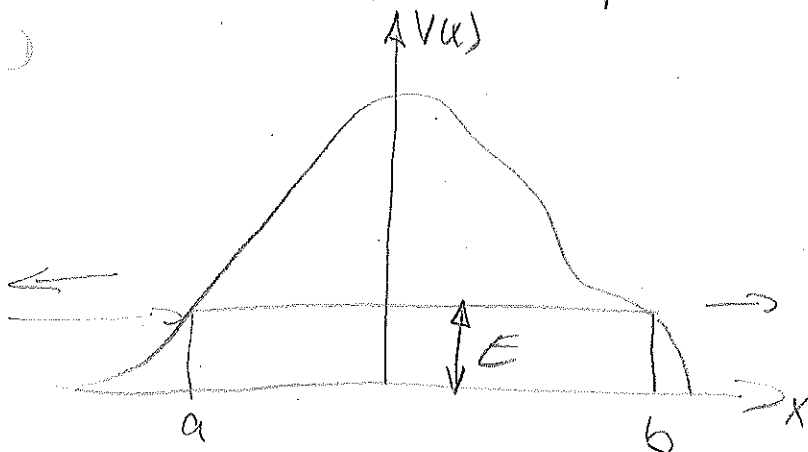
• wegen $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ gilt wenn zusätzlich $\alpha \ell \gg 1$ $\sinh(\alpha \ell) \approx \frac{e^{\alpha \ell}}{2}$

$\Rightarrow \lim_{\substack{V_0 \gg E \\ \alpha \ell \gg 1}} T(E) \approx \frac{16E}{V_0} e^{-2\sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar} \approx \frac{16E}{V_0} e^{-\frac{2\sqrt{2m}V_0}{\hbar}} = \frac{2}{T(E)}$

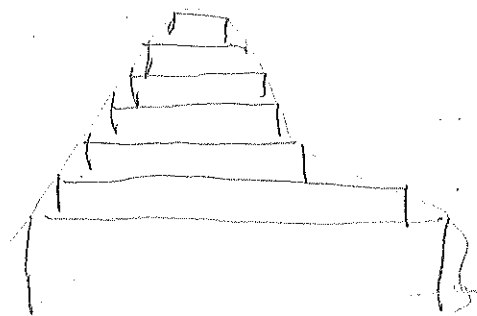
D.h. im klassischen Limes $\hbar \rightarrow 0$ geht mit $\hbar^{-1} \rightarrow \infty$ tatsächlich

$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \tilde{T}(E) = 0$, d.h. es findet keine Transmission mehr statt!

• Verallgemeinerung: Tunneleffekt für allgemeine Potentiale

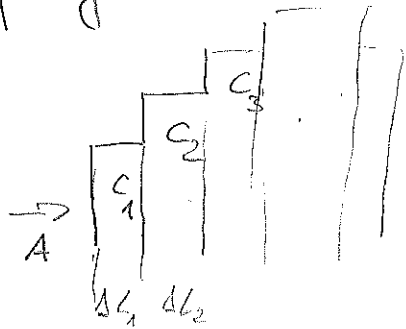


↳ klassische Umkehrpunkte



• Näherung: Wir approximieren $V(x)$ ab den Umkehrpunkten durch kleine Rechteckpotentiale und bilden dann den Limes zu $V(x)$

- für jeden Knoten lösen wir die Schrögl:



Produkt der Wahrscheinlichkeiten

$$\text{d.h. } T(E) \stackrel{!}{=} \frac{|C_1|^2}{|A|^2} \cdot \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2} \dots = T_1(E) \cdot T_2(E) \cdot T_3(E)$$

→ wir benutzen die Näherung von S. 38, $V_0 \gg E$ und $\delta L \gg \lambda$ und behalten nur die Exponentialfunktionen ("sattelpunktnäherung"),

$$\Rightarrow T(E) \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{2m(V(x_i) - E)} dx_i\right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{dann } n \rightarrow \infty \\ \text{und } \Delta L_i \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow T(E) \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{2m(V(x) - E)}\right]$$

Dieser Anteil ^{Näherung} zur Transmission heißt Gamov-Faktor, mit dem klass. Umkehrpunkten als Integrationsgrenzen.

* Es gibt eine genaue Vorlesung dieser Exp.-Fkt inkl. Vorfaktor in der QM II. Dies ist eine gute Näherung solange $T(E) \ll 1$ gilt, d.h. wir in einem sehr klass. Bereich sind (klass.: $T(E) = 0$).

* Der Tunnel-Effekt hat viele wichtige Anwendungen, er führt zu einer gen Instabilität von klass. stabilen Lsg.

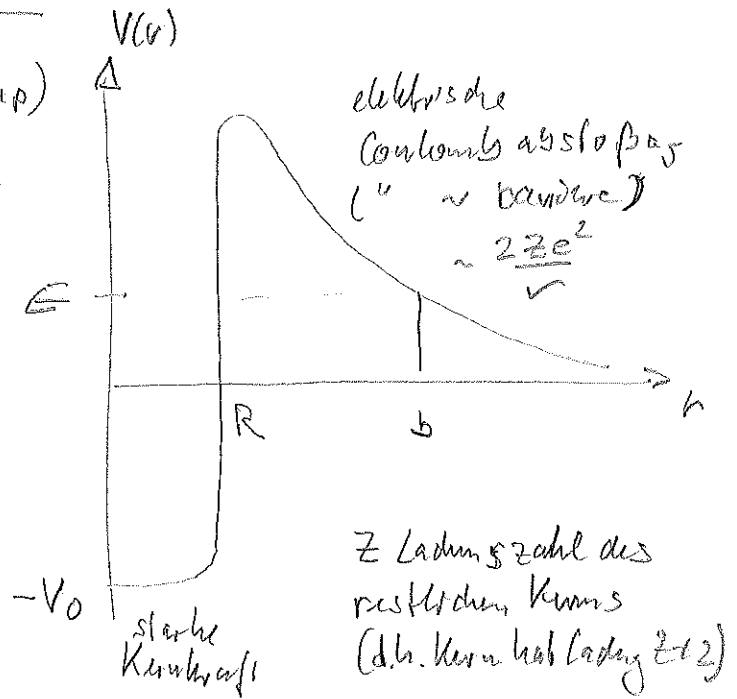
→ Bsp

• Das α -Zell (all in der Kernphysik)

Model für instabile Atomkerne ($n+p$)
mit effektiven Potential $V(r)$, das
nur vom Radius r abhängt

(\Rightarrow 1D Problem)

- kurze Abstände: (starke) Kernkraft dominiert, Potential tief (wagt für Anziehung)



- größere Abstände: elektrische Abstoßung des α -Teilchens (= He-Kern = $2n+2p$) vom restlichen Kern

\rightarrow Exponent im Gamow-Faktor:

$$G(E) = \frac{2}{\hbar} \int_a^b dr \sqrt{2m \left(\frac{2Ze^2}{r} - E \right)}, \quad a \approx R \left(n Z^{1/3} \right), \quad b = \frac{2Ze^2}{E}$$

$$= \frac{2}{\hbar} \sqrt{4mZe^2} \int_a^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}, \quad \text{Substitution } r = b \cdot x$$

$$= \frac{2}{\hbar} \sqrt{4mZe^2} b \int_{a/b}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{4}{\hbar} Ze^2 \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_{a/b}^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Näherung: entwickle in $\frac{a}{b} \ll 1$, $\frac{a}{b} = \frac{ER}{2Ze^2} \approx \frac{E}{Z^{2/3}}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{a}{b}}^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{\pi}{2} - 2 \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^{3/2} + \mathcal{O} \left(\frac{a}{b} \right)^{5/2}$$

da $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}} \cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cot\theta d\theta = \ln \left| \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right| \Big|_0^{\pi/2} = \ln \left| \frac{0}{1} \right| - \ln \left| \frac{1}{0} \right| = \ln 0 - \ln \infty = -\infty - (-\infty) = \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow Beziehung zwischen Zerfallswahrscheinlichkeit $\Gamma(E)$ $\propto T(E) \propto e^{-G(E)}$ Energie E
des auslaufenden α -Teilchens und Ladungszahl Z des Restkerns.

\rightarrow gute Übereinstimmung mit Experiment ist ein der besten großen Erfolge der QM.

2.4. Teilchen im Gitterpotential [Fließband III. 13]

- im Kapitel 2.1. auf Seite 26 hatten wir gesehen, dass für

Symmetrische Potentiale $V(x) = V(-x)$

die Wellenfunktionen symmetrisch
anti-symmetrisch

$$\psi_E(-x) = +\psi_E(x) \text{ oder}$$

$$\psi_E(-x) = -\psi_E(x) \text{ gewählt werden können.}$$

d.h. diese sind Eigenfunktionen des Paritätsoperators \hat{P}

mit $\hat{P}V(x) = V(-x) = V(x)$ und entsprechend $|\hat{P}\psi_E(x)| = \pm \psi_E(x)$

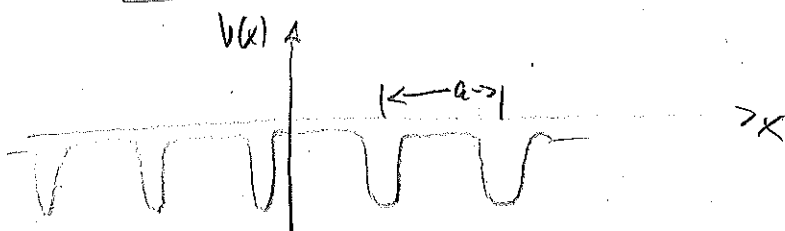
\Rightarrow insbesondere ist die Wahrscheinlichkeitsdichte

Symmetrisch $|\psi_E(-x)|^2 = |\psi_E(x)|^2$

- Wir betrachten nun ein Potential welches periodisch ist (Gitter v)

$$V(x+na) = V(x) \quad \forall x, \forall n \in \mathbb{Z}$$

wie z.B. in Kristallgittern
 (hier 1D!)



$a > 0$ ist die Gitterkonstante

\rightarrow aus Symmetriegründen gilt sicher für die W. dichte

$$|\psi_E(x+na)|^2 = |\psi_E(x)|^2 \quad \forall x, \forall n \in \mathbb{Z}$$

wie transformiert $\psi_E(x)$?

Ansatz Phase: $\psi_E(x+na) = e^{if(na)} \psi_E(x)$, $f(na) \in \mathbb{R}$ damit

und es gilt $\psi_E(x+2a) = e^{if(2a)} \psi_E(x) \Rightarrow \psi_E(x+2na) = e^{2if(na)} \psi_E(x) = e^{if(2na)} \psi_E(x)$

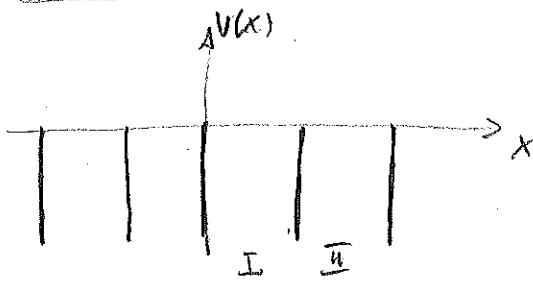
$\Rightarrow f(2a) = 2f(a)$ sowie für bel. n , d.h.

$f(na) = n f(a)$ also ist f linear: $f(na) = kna$, $k \in \mathbb{R}$ konst

$$\Rightarrow \boxed{\psi_E(x+na) = e^{ikna} \psi_E(x)} \text{ "Bloch'scher Satz"}$$

* es hängt sicher k von $V(x)$ ab. Betrachten wir also am

Beispiel: $V(x) = -\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x+na)$, $\Omega > 0$ (vgl. Ü 3.2, 3.3)



Drac- δ Kamm

Wir betrachten $E > 0$ hier \rightarrow Kontinuum
(für $E < 0$ erwarten wir ein diskontinuierliches Spektrum)

Bereich I $0 < x < a$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_E^I(x) = E \psi_E^I(x)$, $E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} > 0$

$\Rightarrow (\psi_E^I(x))'' = -k_0^2 \psi_E^I(x)$

Lösung $\left(\psi_E^I(x) = A e^{ik_0 x} + B e^{-ik_0 x} \right)$

Bereich II $a < x < 2a$: wir wissen bereits $\psi_E^I(x+a) = e^{ik_0 a} \psi_E^I(x)$ $0 < x < a$

$\Rightarrow \psi_E^II(x) = e^{ik_0 a} \psi_E^I(x-a)$ $a < x < 2a$

$\psi_E^II(x) = e^{ik_0 a} [A e^{ik_0(x-a)} + B e^{-ik_0(x-a)}]$

Anschlussbedingungen bei $x=ca$:

s. Seite 24: wir ψ' in $V(x) \Rightarrow \psi_E(x)$ stetig

Aber: hier δ in $V(x)$, d.h. $\psi_E(x)'$ ist nicht stetig!

• wir denken uns die δ -Fkt. als Limes einer glatten Darstellung (z.B. Gauß)

\Rightarrow wir können in der Nähe von $x \approx a$ schreiben

Schwächt $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \Omega \delta(x-a) \right] \psi_E(x) = E \psi_E(x)$

die anderen δ sind weit weg von $x \approx a$ und deshalb 0

$\Leftrightarrow -\psi_E(x)'' - \frac{2m\Omega}{\hbar^2} \delta(x-a) \psi_E(x) = k_0^2 \psi_E(x)$

Integriere diese Gleichung auf Intervall $[a^-, a^+]$ um $x=a$, $a^\pm = a \pm \epsilon$
 $\epsilon > 0$

$$-\int_{a^-}^{a^+} dx \psi_E''(x) - \int_{a^-}^{a^+} dx \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} S(x-a) \psi_E(x) = \underbrace{k_0^2}_{-a} \int_{-a}^{a^+} dx \psi_E(x)$$

Stammfkt von $\psi_E'(x)$ S nur um $a \neq 0$, wichtig dasselbe wie $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a) \psi_E(x) = \psi_E(a)$ (wichtig da ψ_E stetig bei a) $\epsilon \rightarrow 0 \rightarrow \infty$
 $\sim 2\epsilon k_0^2 \psi_E(a) \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi_E'(a^+) - \psi_E'(a^-) + \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \psi_E(a) = 0 \quad \text{i) Unstetigkeit der Ableitung} \\ \psi_E(a^+) = \psi_E(a^-) \quad \text{ii) Stetigkeit von } \psi_E(x) \text{ bei } x=a \end{array} \right.$$

im Bereich II im Bereich I

$$i) \quad e^{iku} \left[A e^{ik_0(a^+-a)} + B e^{-ik_0(a^+-a)} \right] = A e^{ik_0 a^+} + B e^{-ik_0 a^+}$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad e^{iku} [A+B] = A e^{ik_0 a} + B e^{-ik_0 a}$$

$$ii) \quad e^{iku} \left[ik_0 A e^{ik_0(a^+-a)} - ik_0 B e^{-ik_0(a^+-a)} \right] = (ik_0 A e^{ik_0 a^+} - ik_0 B e^{-ik_0 a^+})$$

$$= -\frac{2m\epsilon}{\hbar^2} e^{iku} [A+B] \quad (\text{an der rechten Seite ist egal ob wir I oder II wählen, wegen i)})$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad ik_0 e^{iku} [A-B] - ik_0 (A e^{ik_0 a} - B e^{-ik_0 a}) = -\frac{2m\epsilon}{\hbar^2} e^{iku} [A+B]$$

Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} e^{iku} & -e^{iku} \\ ik_0 (e^{iku} - e^{-iku}) - \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} e^{iku} & -ik_0 (e^{-iku} - e^{iku}) - \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} e^{iku} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\exists eine nicht-triviale Lösung für A und $B \Leftrightarrow \det \text{Matrix} = 0$,

also nach Regel von Sarrus $\det[X]$