6.4 Paralleltransport, Geodäten und Krümmung [Schutz 6.4]

Um den Begriff der Krümmung einzuführen, unterscheiden wir zunächst die intrinsische (innere) Krümmung von der extrinsischen (äußeren) Krümmung, am Beispiel eines Zylinders. Dieser kann durch Aufrollen eines flachen Blattes Papier gebildet werden

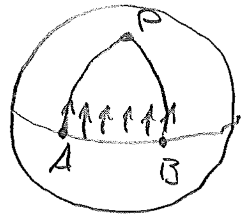
⇒ Seine intrinsische Krümmung verschwindet, da alle Euklidischen Axiome, die in der Ebene gelten, auch für den Zylinder gelten: so bleiben parallele Linien wenn fortgesetzt parallel. Allerdings besitzt er eine extrinsische, äußere Krümmung, diese können wir nur durch Einbettung der 2D Fläche in 3D sehen.

Ein Bewohner des Zylinders in 2D bemerkt diese äußere Krümmung als topologische Eigenschaft, da er in Aufrollrichtung gehend wieder am Ausgangspunkt ankommt.

Wir betrachten im Folgenden nur innere Krümmung (lassen oft "innere" weg).

Am Beispiel einer Kugel sehen wir, daß diese nicht Null sein kann: Parallelen schneiden sich:

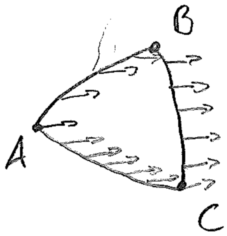
die Linien starten parallel in A und B vom Äquator, und schneiden sich in Punkt P.



• Wie quantifizieren wir die innere Krümmung genauer?

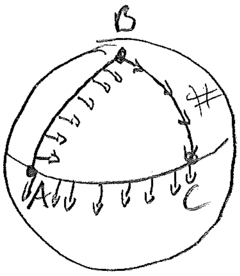
Wir transportieren einen Vektor parallel entlang einer Linie, kehren zum Ausgangspunkt zurück und vergleichen.

1. Beispiel: entlang gekrümmter Linien in der Ebene: von $A \to B \to C$



Fazit: der so transportierte Vektor kommt parallel zurück $\nexists$ Krümmung

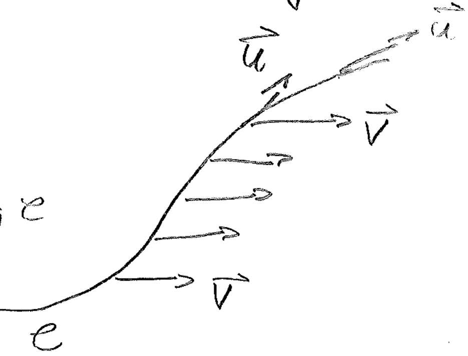
2. Beispiel: Dreieck über den Nordpol auf einer Kugel:
auch diese ist lokal flach, d.h. wir können infinitesimal immer entscheiden, ob der Vektor parallel bleibt



Fazit: der so transportierte Vektor kommt um $\frac{\pi}{2} = 90°$ gedreht zurück $\Rightarrow \exists$ Krümmung

Paralleltransport entlang von Kurven

Wir betrachten eine Kurve $\mathcal{C}$ mit Parametrisierung λ, und transportieren einen Vektor $\vec{V}$ infinitesimal parallel entlang dieser Kurve, so daß die Länge von $\vec{V}$ erhalten bleibt:



es ist $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$ der Tangentialvektor entlang $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ der Paralleltransport von $\vec{V}$ entlang $\mathcal{C}$ ist dadurch definiert, daß in einem lokalen Inertialsystem (MCRF) in $\mathcal{P}$ $\vec{V}$ konstant bleibt entlang $\mathcal{C}$:

$$0 = \left.\frac{dV^\alpha}{d\lambda}\right|_{\mathcal{P}} = u^\beta V^\alpha{}_{,\beta}\Big|_{\mathcal{P}} = u^\beta V^\alpha{}_{;\beta}$$ da Γ's im MCRF verschwinden

Letztere Gleichung gilt in allen Systemen, also ist

$$\boxed{0 = u^\beta V^\alpha{}_{;\beta}} \Leftrightarrow \frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \nabla_{\vec{u}}\vec{V} = 0$$ die Definition

des Paralleltransportes von $\vec{V}$ entlang von $\mathcal{C}$.

Geodäten

Im Flachen werden Euklids Axiome durch 2 parallele Linien definiert, die wenn als Geraden fortgesetzt parallel bleiben.
Wie wird das Konzept, eine Linie als Gerade fortzusetzen, im gekrümmten Raum fortgesetzt? Eine definierende Eigenschaft ist, daß die Gerade im Euklidischen die einzige Linie ist, die ihren eigenen Tangentialvektor parallel fortsetzt!

Kurven mit derselben Eigenschaft im gekrümmten Raum heißen Geodäten, im lokalen MCRF sind dies Geraden:

$\vec{u}$ bleibt tangential zur Geodäte $\Leftrightarrow \nabla_{\vec{u}} \vec{u} = 0$, in Komponenten

$$\underline{0 =} U^\beta U^\alpha{}_{;\beta} = \underline{U^\beta U^\alpha{}_{,\beta} + U^\beta U^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}}$$

Wenn λ die Kurve parametrisiert, d.h. $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$, läßt sich die Ableitung z.B. auf Skalar ϕ schreiben als (s. S.20)

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = U^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = U^\alpha \phi_{,\alpha}, \text{ d.h. } \frac{d}{d\lambda} = U^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$ und damit

ergibt sich für obige Gleichung $\boxed{0 = \frac{d}{d\lambda}\frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}}$. Diese heißt Geodätengleichung und hat für Anfangsbedingungen $\lambda = \lambda_0$, $x_0^\alpha = x^\alpha(\lambda_0)$ und $U_0^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\big|_{\lambda_0}$ eine eindeutige Lösung.

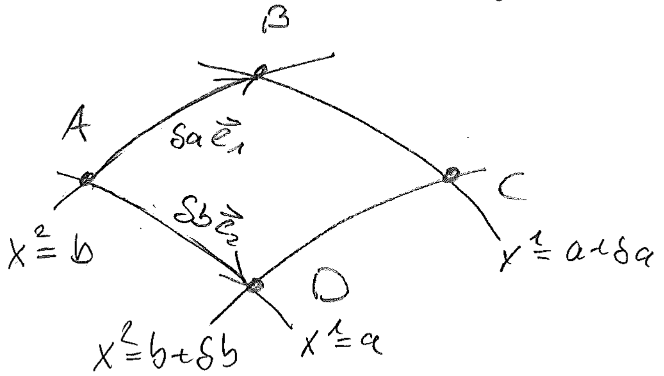
Eigenschaften

- Die Parametrisierung einer Kurve ist nicht eindeutig. Folgende, affine Parametertransformation $\phi = a\lambda + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, läßt die Geodätengleichung invariant $\frac{d^2x^\alpha}{d\phi^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{dx^\mu}{d\phi}\frac{dx^\beta}{d\phi} = 0$ (und nur diese Trafo).

- Geodäten sind Kurven von extremaler Länge. Dies lässt sich mittels Euler-Lagrange-Gleichungen für festes λ_0, λ_1 auf S. 60 oben zeigen $\rightarrow$ Übung.

6.5. Der Krümmungstensor [Schutz 6.5]

Wir kommen nun zur mathematischen Beschreibung intrinsischer, innerer Krümmung mit Hilfe des Paralleltransportes. Wir betrachten dazu ein infinitesimal kleines Segment auf unserer $\mathcal{M}$:



dieses wird durch 2 Linien $x^1 = a$, $x^1 = a+\delta a$ in $\vec{e}_2$-Richtung und 2 Linien $x^2 = b$, $x^2 = b+\delta b$ in $\vec{e}_1$ Richtung begrenzt.

Wir betrachten nun den Paralleltransport von $\vec{V}$: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A_{\text{final}}$

- $A \rightarrow B$: Per Definition des Paralleltransportes in $\vec{e}_1$-Richtung von $\vec{V}$ gilt

$$\boxed{0 = \nabla_{\vec{e}_1} \vec{V} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu}$$

Wegen $\int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = V^\alpha(B) - V^\alpha(A)$ hat $\vec{V}$ in B die Komponenten

$$\underline{V^\alpha(B)} = V^\alpha(A) + \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = \underline{V^\alpha(A) - \int_{x^2=b} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu dx^1}$$

- $B \rightarrow C$: es gilt genauso

$$\boxed{0 = \nabla_{\vec{e}_2} \vec{V} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu}$$

$$\Rightarrow \underline{V^\alpha(C)} = V^\alpha(B) + \int_B^C \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^2} dx^2 = \underline{V^\alpha(B) - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu dx^2}$$

$\underline{C \to D:}$ $\quad 0 = \nabla_{\vec{e}_1} \vec{V}$ Integration in $-\vec{e}_2$-Richtung

$$\Rightarrow V^\alpha(D) = V^\alpha(C) + \int_C^D \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = V^\alpha(C) + \int_{x^2 \hat{=} b+\delta b} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1$$

$\underline{D \to A:}$ $\quad 0 = \nabla_{\vec{e}_2} \vec{V}$

$$\Rightarrow V^\alpha(A_{final}) = V^\alpha(D) + \int_D^A \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^2} dx^2 = V^\alpha(D) + \int_{x^1 \hat{=} a} \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2$$

Differenz zwischen Anfang A und A_{final}:

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(A_{final}) - V^\alpha(A) = -\int_{x^2 \hat{=} b} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 - \int_{x^1 = a+\delta a} \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2$$

$$+ \int_{x^2 \hat{=} b+\delta b} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 + \int_{x^1 = a} \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2$$

* im flachen Raum wäre $\delta V^\alpha = 0$, da $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ und V^μ konstant wären auf dem Weg ABCDA um das Segment, und damit ihre Ableitungen verschwänden. I.A. ist dies aber nicht der Fall s. S. 61, und wir können in δa (2. und 4. Integral) bzw. δb (1. und 3.) Taylor entwickeln:

$$\Rightarrow \delta V^\alpha = -\int_a^{a+\delta a} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu \Big|_{x^2 \hat{=} b} dx^1 + \int_a^{a+\delta a} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu \Big|_{x^2 \hat{=} b+\delta b} dx^1 + \int_b^{b+\delta b} \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu \Big|_{x^1 \hat{=} a} dx^2 - \int_b^{b+\delta b} \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu \Big|_{x^1 \hat{=} a+\delta a} dx^2$$

$$\approx + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu\right)\Big|_{x^2 \hat{=} b} dx^1 - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu\right)\Big|_{x^1 = a} dx^2$$

$$\approx \delta a \, \delta b \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu\right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu\right) \right]_{\substack{x^1 \hat{=} a \\ x^2 \hat{=} b}}$$

- die Ableitungen von V^μ können mit Hilfe von $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{V} = 0 = \nabla_{\vec{e}_2} \vec{V}$ wieder durch Γ's ausgedrückt werden

$$\Rightarrow \delta V^\alpha = \delta a \delta b \left[\Gamma^\alpha{}_{\mu 1,2} - \Gamma^\alpha{}_{\mu 2,1} + \Gamma^\alpha{}_{\nu 2} \Gamma^\nu{}_{\mu 1} - \Gamma^\alpha{}_{\nu 1} \Gamma^\nu{}_{\mu 2} \right] V^\mu$$

- dies ist antisymmetrisch in 1 2, für den Paralleltransport in umgekehrter Richtung würden wir $-\delta V^\alpha$ erhalten
- es ist $\delta a\, \delta b$ die Fläche des Segmentes
- für ein Segment in x^σ statt in x^1 und x^λ statt in x^2 Richtung erhalten wir analog

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b \left[\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} \right] V^\mu$$

diese Gleichung ist linear in $\delta a\, \vec{e}_\sigma$, $\delta b\, \vec{e}_\lambda$, V^μ und $\delta V^\alpha = \delta\vec{V}(\tilde{\omega}^\alpha)$

$\Rightarrow$ wir definieren den <u>Riemannschen Krümmungstensor $\mathcal{R}$ der Stufe $\binom{1}{3}$</u>,

mit <u>Komponenten</u>

$$\boxed{\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &\equiv \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \\ &= \mathcal{R}(\tilde{\omega}^\alpha; \vec{e}_\beta, \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \end{aligned}}$$

($\exists$ andere Def – $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ in der Lit.)

Dieser quantifiziert die Krümmung und mittels $\mathcal{R}$ können wir die Änderung δV^α im Paralleltransport aufgrund der Krümmung ausrechnen.

- Wir betrachten die <u>Komponenten von $\mathcal{R}$ im</u> lokalen Inertialsystem <u>MCRF</u>, wo zwar $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$, aber

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\sigma} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S.61}}}{=} \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma} \right) \quad \text{(in Herleitung)}$$

$$\Rightarrow R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\beta,\mu\nu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} \right)$$

da $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\sigma\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\sigma\beta}$ für 2x stetig diffbare Metrik

Index senken

$\Rightarrow \; g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} = \underline{R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu})}$

$$\Rightarrow \; \boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = +R_{\mu\nu\alpha\beta}}$$

d.h. antisymmetrisch im ersten und letzten Indexpaar und symmetrisch unter Vertauschung des 1. Indexpaares mit dem 2. Indexpaar

- da R ein Tensor gelten diese Gleichungen in allen Systemen

desgleichen gilt (Übung):

$$\boxed{0 = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta}}$$ in allen Systemen,

d.h. die Summe über die zyklischen Vertauschungen der letzten 3 Indizes verschwindet

$\Rightarrow$ $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ hat 20 unabhängige Komponenten (→ Ü)

dies ist kein Zufall, denn (s. S. 59) wir konnten genau $100 - 80 = 20$ Komponenten von den 2. Ableitungen $g_{\alpha\beta,\gamma\mu}$ nicht zu Null wählen.

Eine flache M hat die Eigenschaft, daß global der Paralleltransport eines Vektors um ein beliebiges Segment wieder auf denselben Vektor führt. d.h. überall ist $\delta V^\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \; R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0$ überall

Der Riemann-Tensor und die 2. kovariante Ableitung

- Wir hatten gesehen (s. S. 61), daß im MCRF die Ableitung eines Vektorfeldes gleich der kovarianten ist: $V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$

denn dort $\Gamma = 0$