• Entwickle die geometrische Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\frac{(z-z_0)}{(\zeta-z_0)}\right)}, \quad \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

. Diese Reihe ist absolut konvergent und kann termweise integriert werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=s} d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}}_{\equiv a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n .$$

Dies ist nichts anderes als die Taylorreihe!

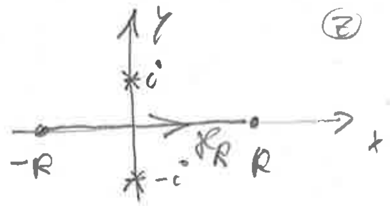
* Die Koeffizienten einer Laurentreihendarstellung von $f(z)$ analytisch lassen sich ebenfalls ~~durch Konturintegrale von $f(z)$~~ darstellen (s. später)

zunächst ein konkretes Anwendungsbeispiel des Residuensatzes [Arfken 7.1]

• Berechnung von reellen Integralen mittels Residuensatz:

Beispiel (i) $\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{1}{1+x^2}}$ (← dieses uneigentliche Integral ist eigentlich der Grenzwert $\lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} dx \, \frac{1}{1+x^2}$)

("Hauptwert") Schreibe $I = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$

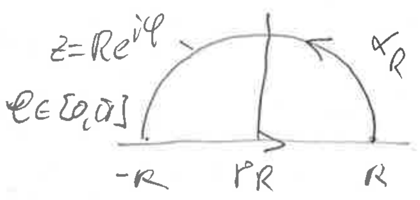


• wegen $z^2+1 = (z-i)(z+i)$

hat der Integrand $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ einfache Pole bei $z = \pm i$

• um den Residuensatz anzuwenden brauchen wir eine geschlossene Kurve γ. Idee: schließe γ_R so, daß der Beitrag zu I im Limes $R\to\infty$ verschwindet

$\gamma = \alpha_R \cup \gamma_R$

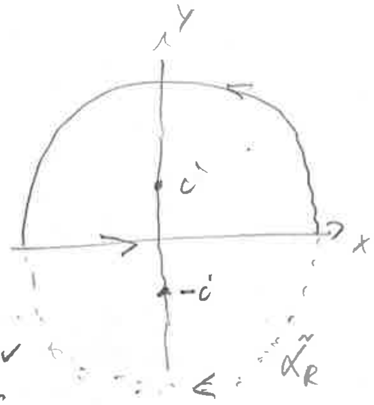


⇒ wir müssen $\int\limits_{\alpha_R} \frac{dz}{1+z^2}$ mit dem ML Lemma abschätzen:

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \underset{z=Re^{i\varphi}}{=} \sqrt{\left(\frac{1}{1+z^2}\right)\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^*} = \sqrt{\frac{1}{(1+R^2e^{2i\varphi})}\,\frac{1}{(1+R^2e^{-2i\varphi})}} = \sqrt{\frac{1}{1+R^4+R^2 2\cos 2\varphi}}$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{(1+R^4-2R^2)}} = \sqrt{\frac{1}{(R^2-1)^2}} \underset{R>1}{=} \frac{1}{(R^2-1)}$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{\alpha_R}\frac{dz}{1+z^2}\right| \le \underbrace{\frac{1}{(R^2-1)}}_{M}\,\underbrace{\pi R}_{L} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$



$$\Rightarrow I = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R\cup\alpha_R}\frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{+i}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$$

Residuensatz

da nur $z=+i$ 1x positiv umlaufen

$$\mathrm{Res}_{+i}\left(\left(\frac{1}{z-i}\right)\cdot\frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-i|=\varepsilon}\frac{dz}{z-i}\underbrace{\left(\frac{1}{z+i}\right)}_{=f(z)} \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$$

$$\left(\text{und } \mathrm{Res}_{-i}\left(\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{z+i}\right)\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z+i|=\varepsilon}\frac{dz}{z+i}\,\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i-i} = -\frac{1}{2i}\right)$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi \iff \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi}$$

alternative Möglichkeit: γ_R nach unten schließen $\tilde{\alpha}_R$, ML Lemma geht genauso, nur läuft der Weg in negativer Richtung d.h. $I = -2\pi i\,\mathrm{Res}_{-i}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{-2\pi i}{-2i} = \pi$ ✓

Verallgemeinerung für $a>0$:

$$\boxed{I(a) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \ldots = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{+ia}\frac{1}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{2\pi i}{2ia} = \frac{\pi}{a}}$$

(oder durch Substitution $x=ay \Rightarrow I(a) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{a}$
wie bisher in der 1dim Analysis)

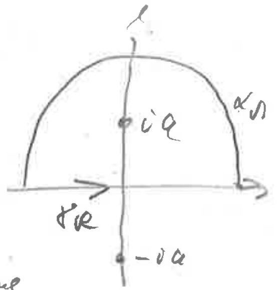
Beispiel ii) $I_2(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ mit $a>0$

• wir benutzen denselben Hilfsweg α_R, mit Abschätzung des Integranden

$$\left|\frac{1}{(a^2+R^2e^{2i\varphi})^2}\right| = \left|\frac{1}{(a^2+R^2e^{2i\varphi})}\right|^2 \le \frac{1}{(R^2-a^2)^2}$$

, wegen $R\to\infty$ können wir $R>a$ annehmen

$$\Rightarrow \left|\int_{\alpha_R}\frac{dz}{(a^2+z^2)^2}\right| \le \underbrace{\frac{1}{(R^2-a^2)^2}}_{M}\cdot\underbrace{\pi R}_{L} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$



• Bestimmung des Residuums

$$f(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)^2} = \frac{1}{(z-ia)^2}\cdot\frac{1}{(z+ia)^2},$$

∃ 2 Pole 2. Ordnung, nur der bei ia wird im pos. Sinne umlaufen

S. 38: $$\mathrm{Res}_{ia} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-ia|=\varepsilon} dz\, \frac{1}{(z-ia)^2}\,\frac{1}{(z+ia)^2} = \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{(z+ia)^2}\right)'\Big|_{z=+ia}$$

S. 41 $\leftarrow g(z)$, benutze Cauchy-Formel f. Ableitungen

$$= \frac{-2}{(z+ia)^3}\Big|_{z=ia} = \frac{-2}{(2ia)^3}$$

$$\Rightarrow I_2(a) \underset{\text{Residuensatz}}{=} 2\pi i\, \mathrm{Res}_{ia} f(z) = \frac{\cancel{2}\pi \cancel{i}(-\cancel{2})}{2^3(-i)a^3} = \boxed{\underset{>0}{\frac{\pi}{2a^3}} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}}$$

• check 1: wir integrieren eine positive Funktion auf $\mathbb{R}$, d.h. $I_2(a)>0$, ok)

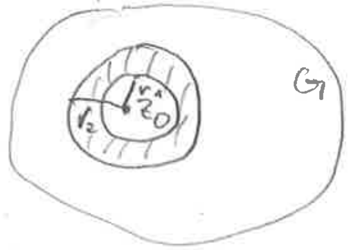
• check 2: $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{(a^2+x^2)^2} = \lim_{b\to a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} \underset{\text{Partialbruch}}{=} \lim_{b\to a}\int_{-\infty} dx\, \frac{1}{(b^2-a^2)}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)$$

$$\overset{I(a)}{=} \lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{b}\right) = \lim_{b\to a}\pi\frac{b-a}{\underset{b+a}{(b^2-a^2)}ab} = \frac{\pi}{2a^3} \quad ✓$$

• die Bestimmung des Integrals wird auf die Berechnung des Residuums mittels Cauchy-Formel und einer Differentiation reduziert!

• Konsequenzen aus Residuensatz und Cauchyformeln II:

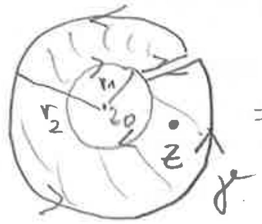
Laurentreihenentwicklung: Sei $f(z)$ analytisch in G und der Kreisring $\{z \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ liege ganz in G. Dann lässt sich $f(z)$ in diesem Ring in eine Laurentreihe entwickeln,



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r_2} dw \, \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} & \text{für } n \geq 0 \qquad \text{Nebenteil} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r_1} dw \, \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} & \text{für } n \leq -1 \qquad \text{Hauptteil} \end{cases}$$

Beweis: Wegen Cauchy-Formel gilt $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} dw \, \dfrac{f(w)}{w-z}$
γ umläuft z 1x



$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r_2} dw \, \frac{f(w)}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r_1} dw \, \frac{f(w)}{w-z}$$

$\Rightarrow$ Nebenteil $\qquad \Rightarrow$ Hauptteil

• um die Koeffizienten für Haupt- und Nebenteil zu finden entwickle die geometrische Reihe $\dfrac{1}{w-z}$:

- äußerer Ring mit Radius r_2: $|z-z_0| < |w-z_0|$, d.h. $\dfrac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0)} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r_2} dw \frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r_2} dw \, \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}}_{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underset{n \geq 0}{a_n}$$

Nebenteil

- innerer Ring mit Radius r_1:

$$|w-z_0| < |z-z_0| \quad \text{d.h.} \quad \frac{|w-z_0|}{|z-z_0|} < 1$$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)}\,\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

eingesetzt in
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z_0|=r_1} dw\, \frac{f(w)}{z-w} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^{-n-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z_0|=r_1} dw\, f(w)\,(w-z_0)^{n}}_{\substack{a_{-n-1} \quad n=0,1,\ldots \\ \equiv a_m\,,\ m=-1,-2,\ldots}}$$

negative Potenzen = Hauptteil

$-m-1$

Satz von Liouville:

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion (auf ganz $\mathbb{C}$). Wenn es eine Konstante $M>0$ gibt, so daß $\forall z \in \mathbb{C}$ $|f(z)| \leq M$, d.h. f auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist, so folgt daß $f(z) = \text{const.}$ sein muß.

Beweis: Sei $K_\varrho(z_0)$ eine Kreisscheibe um z_0 mit Radius $\varrho>0$ und Rand $\partial K_\varrho(z_0)$. Dann gilt wg. Cauchy-Formel f. Ableitungen:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial K_\varrho(z_0)} dz\, \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$$

f beschränkt

ML Lemma $\Rightarrow$
$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot \underbrace{2\pi\varrho}_{L} \cdot \frac{M}{\varrho^2} = \frac{M}{\varrho} \xrightarrow[\varrho\to\infty]{} 0$$
da f für beliebige ϱ beschränkt bleibt durch dasselbe M $\Rightarrow |f'(z_0)| \leq 0$

d.h. $f'(z_0) = 0$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, d.h. $f(z) = \text{const.}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Folgerung: Wenn f analytisch und nicht const. sein soll muß f irgendwo Singularitäten haben.