Was ist mit der 2. kovarianten Ableitung (def als Tensor), denn $\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta,\rho} \neq 0$ i.A.?

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = V^\mu{}_{;\beta\alpha} = \nabla_\alpha (V^\mu{}_{;\beta}) \overset{\downarrow}{=} (V^\mu{}_{;\beta})_{,\alpha} + V^\sigma{}_{;\beta}\underbrace{\Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha}}_{\text{aber im MCRF } =0} - V^\mu{}_{;\sigma}\underbrace{\Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha}}_{=0}$$

$$\Rightarrow = \left(V^\mu{}_{,\beta} + V^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta}\right)_{,\alpha} = V^\mu{}_{,\beta\alpha} + V^\nu{}_{,\alpha}\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}}} + V^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = V^\mu{}_{,\beta\alpha} + V^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha}}$$, wegen $V^\mu{}_{,\beta\alpha} = V^\mu{}_{,\alpha\beta}$

folgt für den Kommutator

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = \underbrace{\left(\Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta}\right)}_{= R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \text{ im MCRF, s. S. 68}} V^\nu$$

$$\Leftrightarrow \boxed{[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu}$$

Diese Tensorgleichung gilt wiederum in allen Systemen und lässt sich auf Tensoren verallgemeinern:

Beispiel $$\boxed{[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] F^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} F^\sigma{}_\nu + R^\sigma{}_{\nu\alpha\beta} F^\mu{}_\sigma}$$

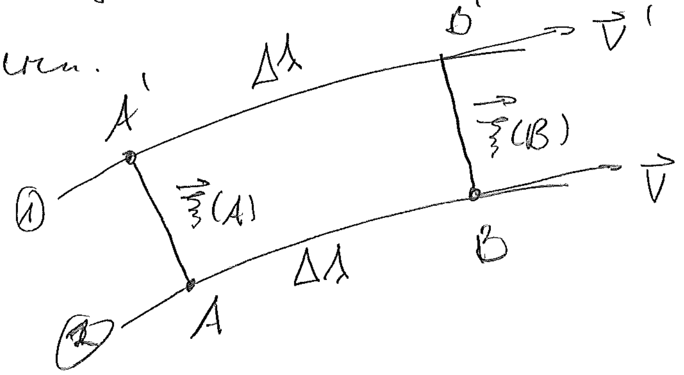
für einen Tensor der Stufe $\binom{1}{1}$

Wichtig: Im Gegensatz zur kovarianten Ableitung, wo Γ mit +/− kommt, je nachdem ob es auf untere/obere Indizes wirkt (s. S. 61), kommt im Kommutator $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ der Riemann-Tensor mit "+" für jeden Index. Grund: $g_{\sigma\mu;\alpha} = 0$, d.h. wir können z.B. oberen Index von $F^\mu{}_\nu$ unter dem Kommutator herunterziehen, ohne Vorzeichenwechsel.

Diese Gleichung ist eng verwandt mit der Herleitung von $\delta V^\alpha = 0$ auf Seite 68, denn wir vergleichen hier die Änderung von $\vec{V}$ erst in Richtung x^β und dann in Richtung x^α, und der umgekehrten Reihenfolge.

Geodätische Abweichung

Wir haben bereits erwähnt, daß im gekrümmten Raum zwei ursprünglich parallele Linien, wenn diese geodätisch fortgesetzt werden, i.A. nicht parallel bleiben. Im folgenden werden wir diese Aussage mathematisch mit Hilfe des Riemann-Tensors formulieren.



der Abstand zwischen den Geodäten 1 und 2 sei klein $|\vec{\xi}\cdot\vec{\xi}| \ll 1$

Wir betrachten 2 Geodäten, mit Tangentialvektoren $\vec{V}$ und $\vec{V}'$, die in A und A' parallel starten. Es seien beide durch λ, den affinen Parameter parametrisiert, und $\vec{\xi}$ ist der Vektor, der Geodäten verbindet, indem er Punkte, die dasselbe Parameterintervall durchlaufen haben verbindet, also z.B. A und A' bzw. B und B'.

Wir betrachten in A ein lokales Inertialsystem (MCRF), und wählen die Koordinate x^0 entlang der Geodäte.

$\Rightarrow$ in A (s. S.20): $\vec{V} = \left(\frac{dx^0}{d\lambda}, \frac{dx^1}{d\lambda}, \frac{dx^2}{d\lambda}, \frac{dx^3}{d\lambda}\right) = (1,0,0,0)$, d.h. $V^\alpha = \delta^\alpha_0$

Geodätengleichung in A: $$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \underbrace{\Gamma^\alpha_{\mu\beta}}_{\text{alle } 0 \text{ da MCRF}} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = \boxed{\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} = 0}$$

Geodätengleichung in A': $$\left.\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}\right|_{A'} + \left.\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right|_{A'} \left.\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right|_{A'} \left.\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right|_{A'} = \boxed{\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{00} = 0}$$

wobei $\vec{V}$ und $\vec{V}'$ parallel sein sollen,

d.h. auch $V'^\alpha = \delta^\alpha_0$ und somit $\left.\frac{dx^0}{d\lambda}\right|_{A'} = 1$, $\frac{dx^i}{d\lambda} = 0$.

In A' ist $\Gamma^\alpha_{00} \neq 0$, entwickeln in $\vec{\xi}$: $$\left.\Gamma^\alpha_{00}\right|_{A'} \simeq \overset{=0}{\left.\Gamma^\alpha_{00}\right|_{A}} + \left.\Gamma^\alpha_{00,\beta}\right|_{A} \xi^\beta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda^2}\Big|_{A'} + \Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta}\,\xi^{\beta}\Big|_{A} = 0$$

• Per Definition ist $\xi^{\alpha} = x^{\alpha}(\lambda, \mathcal{B}) - x^{\alpha}(\lambda, 0)$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d^2\xi^{\alpha}}{d\lambda^2}} = \frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\Big|_{A'} - \frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2}\Big|_{A} = \underline{-\Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta}}\,\xi^{\beta}\Big|_{A}$$

, da ξ^{α} klein auch rechte Seite in A

→ wie können wir das durch $\mathcal{R}$ ausdrücken: kovariante Ableitung

• die Tatsache, daß $\vec{\xi}$ entlang $\vec{V}$ parallel transportiert wird in A läßt sich schreiben als (s. S. 64):

in A MCRF, d.h. $\Gamma = 0$

$$0 = \frac{d\vec{\xi}}{d\lambda} = \nabla_{\vec{V}}\vec{\xi} \Leftrightarrow 0 = \nabla_{\vec{V}}\xi^{\alpha} = V^{\beta}\xi^{\alpha}{}_{;\beta} \stackrel{\downarrow}{=} V^{\beta}\xi^{\alpha}{}_{,\beta} \underset{\uparrow}{=} \xi^{\alpha}{}_{,0}$$

wähle Geodäte in x^0-Richtung

Aber: hieraus folgt nicht, daß $\nabla_{\vec{V}}(\nabla_{\vec{V}}\,\xi^{\alpha}) = 0$ in A:

$$\boxed{\nabla_{\vec{V}}(\nabla_{\vec{V}}\,\xi^{\alpha})} = \nabla_{\vec{V}}\Big(\underbrace{V^{\beta}\xi^{\alpha}{}_{,\beta}}_{\frac{d\xi^{\alpha}}{d\lambda}\text{ in A}} + \underbrace{V^{\beta}}_{=\delta^{\beta}_{0}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\,\xi^{\beta}\Big)$$

$$= V^{\gamma}\Big(\frac{d\xi^{\alpha}}{d\lambda} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0}\,\xi^{\beta}\Big)_{;\gamma} \quad \text{in A}, \,{}_{,\gamma}$$

$$= \frac{d^2\xi^{\alpha}}{d\lambda^2} + \big(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0}\,\underset{\text{gibt Null}}{\xi^{\beta}}\big)_{,0} = \underline{\frac{d^2\xi^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0,0}\,\xi^{\beta}}$$

$$\stackrel{\text{s.o.}}{=} \underbrace{\big(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0,0} - \Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta}\big)}_{= R^{\alpha}{}_{00\beta} \text{ wegen S. 68, im MCRF}}\xi^{\beta} = \boxed{R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}\,V^{\mu}V^{\nu}\xi^{\beta}}$$

Hieraus folgt, daß Geodäten nur im flachen Raum ($R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} = 0$) parallel bleiben. Im gekrümmten Raum beschreibt diese Gleichung die geodätische Abweichung, verursacht durch die Gezeitenkräfte der Gravitation

6.6. Ricci-, Einstein-Tensor und Bianchi Identitäten

Wir betrachten die Komponenten des Riemann-Tensors im lokalen MCRF, s. S. 69 oben, und bilden eine weitere partielle Ableitung nach $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$:

$$\Rightarrow R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}\right)$$

- Wir nehmen an, daß alle partiellen Ableitungen vertauschen → bilde die zyklische Summe in den letzten 3 Indizes:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu,\beta\lambda\nu} - g_{\alpha\lambda,\beta\mu\nu} + g_{\beta\lambda,\alpha\mu\nu} - g_{\beta\mu,\alpha\lambda\nu}\right)$$

$$R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\lambda,\beta\nu\mu} - g_{\alpha\nu,\beta\lambda\mu} + g_{\beta\nu,\alpha\lambda\mu} - g_{\beta\lambda,\alpha\nu\mu}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu}$$

, dies gilt im MCRF wo $\Gamma = 0$; dies Tensorgl. gilt überall

also dort $;\lambda$ $\quad ;\nu \quad ;\mu$

$$\boxed{0 = R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}}$$

die Bianchi Identität

(dies ist ein System von Differentialgleichungen)

Der Ricci-Tensor

Dieser ist von Stufe $\binom{0}{2}$ und wird durch Kontraktion definiert:

$$\boxed{R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}}$$

und ist symmetrisch $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ (Ü: zeigen)

Im Prinzip gäbe es weitere mögliche Kontraktionen von $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – jedoch ist die über das 1. oder 2. Index paar $\equiv 0$ wegen dessen Antisymmetrie: $R^{\alpha}{}_{\alpha\gamma\delta} = \underset{\text{sym}}{g^{\alpha\beta}} \underset{\text{antisym}}{R_{\beta\alpha\gamma\delta}} = 0$

sowie $R_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{\gamma} = \underset{\text{sym}}{g^{\gamma\delta}} \underset{\text{antisym}}{R_{\alpha\beta\delta\gamma}} = 0$, und

alle weiteren Kontraktionen führen zu $\pm R_{\alpha\beta}$ (Ü: zeigen Sie dies)

⇒ als symmetrischer Tensor hat $R_{\alpha\beta}$ 10 unabhängige Komponenten

Der Ricci-Skalar ist durch eine weitere Kontraktion definiert:

$$\boxed{R = R_\alpha{}^\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu}$$

Merkregel: gleiche Reihenfolge

Der Einstein-Tensor

Wie wir wissen gilt $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, und wegen $g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma} = \delta^\alpha{}_\sigma$

auch $0 = (\delta^\alpha{}_\sigma)_{;\gamma} \underset{\text{Produktregel}}{=} g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma}\, g_{\beta\sigma} + g^{\alpha\beta} \underbrace{g_{\beta\sigma;\gamma}}_{=0} \Rightarrow \boxed{g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0}$

gilt ebenso für die inverse Metrik.

⇒ Wir können mit $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ Indizes unter kovarianten Ableitungen senken und heben.

Die Kontraktion des Riemann- zum Ricci-Tensor in der Bianchi-Identität ergibt (mit der Symmetrie von $g^{\alpha\beta}$ und $R_{\alpha\beta\mu\nu}$)

$$0 = g^{\alpha\mu}[R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + \overset{\text{antisym}}{R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu}} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}]$$

$$= R^\mu{}_{\beta\mu\nu;\lambda} - R^\mu{}_{\beta\mu\lambda;\nu} + R^\mu{}_{\beta\nu\lambda;\mu}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 = R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^\mu{}_{\beta\nu\lambda;\mu}}$$, die kontrahierte Bianchi-Identität.

Durch weitere Kontraktion, $\cdot g^{\beta\nu}$ erhalten wir eine weitere, nützliche Gleichung

$$0 = g^{\beta\nu}[R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + g^{\mu\alpha} \overset{\text{antisym}}{R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}}]$$

$$= R_{;\lambda} - R^\nu{}_{\lambda;\nu} - g^{\mu\alpha} \underbrace{R^\nu{}_{\alpha\nu\lambda;\mu}}_{R_{\alpha\lambda;\mu}} = R_{;\lambda} - 2R^\mu{}_{\lambda;\mu}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 = 2\left(R^\mu{}_\lambda - \tfrac{1}{2}\delta^\mu{}_\lambda R\right)_{;\mu}}$$ Dies ist die zweifach kontrahierte Bianchi-Identität

Durch Heben des Index innerhalb der Klammer (erlaubt mit $g^{\nu\lambda}$) erhalten wir den folgenden, symmetrischen Tensor

$$\boxed{G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R}$$

, den Einstein-Tensor, und aufgrund der vorherigen Identität verschwindet dessen Divergenz

$$\boxed{G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0}$$

Mittels dieses Tensors können die Einsteinschen Feldgleichungen formuliert werden: $\boxed{G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}}$, und wegen obiger Identität gilt Energie-Impuls-Erhaltung: $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

6.7. Zusammenfassung Krümmung [Schutz 6.7]

1) wir arbeiten auf Riemannschen $\mathcal{M}$ mit Metrik g
2) g hat Signatur +2 und es gibt immer ein lokales System, in dem $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \Rightarrow \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ in einem Punkt P.
3) das invariante Volumenelement ist $\sqrt{-g}$, mit $g = \det[g_{\alpha\beta}]_{\alpha,\beta=0}^{3}$
4) Die kovariante Ableitung ist gleich der gewöhnlichen Ableitung in einem lokalen Inertialsystem. Aufgrund der Krümmung ($\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta} \neq 0$) vertauschen kov. Ableitungen aber nicht: $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu$
5) Die Definition des Paralleltransportes eines Vektors $\vec{\xi}$ entlang einer Kurve mit Tangentialvektor $\vec{V}$ ist $0 = V^\beta \xi^\alpha{}_{;\beta}$
Eine Geodäte transportiert ihren Tangentialvektor parallel.
$V^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = 0$
6) Der Riemann-Tensor R charakterisiert die Krümmung und erfüllt die Bianchi-Identitäten. R hängt von $g_{\alpha\beta}$ und den 1. und 2. Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$. Durch Kontraktion erhalten wir den sym. Ricci-Tensor und Skalar sowie den sym. divergenzfreien Einstein-Tensor.