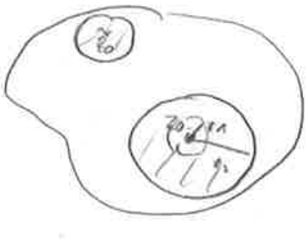
Zusammenfassung:

Folgerungen aus Residuensatz & Cauchy formel (heute mehr davon)

$f$ analytisch in $G$



$\exists$ Taylorentwicklung = Potenzreihen in $K_\rho(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\tilde{z}_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\varepsilon} dw \frac{f(w)}{(w-\tilde{z}_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$\exists$ Laurentreihenentwicklung: $\quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

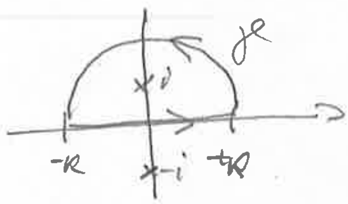
in $\quad r_1 < |z-z_0| < r_2$

mit $a_n = \oint_{|w-z_0|=r_2} \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ für $n \geq 0$, $\quad a_n = \oint_{|w-z_0|=r_1} \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ $\quad n \leq -1$

äußerer Ring: Nebenteil $\qquad$ Hauptteil: innerer Ring

* Wir haben begonnen, uneigentliche reelle Integrale bzw deren Hauptwert mittels Residuensatz zu lösen:

Beispiel $\qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ durch




$$\lim_{R\to\infty} \oint_\gamma dz \frac{1}{1+z^2}$$

Erinnerung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-b}^{a} dx\, f(x) \quad \text{uneigentliches Integral}$$

u. dessen Hauptwert $\quad P\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = ⨍_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} dx\, f(x)$ $\quad$ gleichzeitiger Limes

($P$: principal value)

z.B. existiert $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x$ nicht, aber $P\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} dx\, x = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0$

da $f(x) = x$ ungerade.

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)}\,\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

eingesetzt in

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z_0|=r_1} dw\,\frac{f(w)}{z-w} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^{-n-1}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-z_0|=r_1} dw\, f(w)\,(w-z_0)^{n}}_{a_{-n-1},\ n=0,1,\dots\ \equiv a_m,\ m=-1,-2,\dots}$$

$-m-1$

negative Potenzen = Hauptteil

---

## Satz von Liouville:

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion (auf ganz $\mathbb{C}$). Wenn es eine Konstante $M>0$ gibt, so daß $\forall z \in \mathbb{C}$ $|f(z)| \le M$, d.h. $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist, so folgt, daß $f(z) = \text{const.}$ sein muß.

Beweis: Sei $K_\rho(z_0)$ eine Kreisscheibe um $z_0$ mit Radius $\rho>0$ und Rand $\partial K_\rho(z_0)$. Dann gilt wg. Cauchy-Formel f. Ableitungen:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial K_\rho(z_0)} dz\,\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$$

M-L Lemma $\Rightarrow$

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\underbrace{2\pi\rho}_{L}\cdot\frac{\overbrace{M}^{f \text{ beschränkt}}}{\rho^2} = \frac{M}{\rho} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0$$

da $f(z)$ für beliebige $\rho$ beschränkt bleibt durch dasselbe $M$ $\Rightarrow |f'(z_0)| \le 0$

d.h. $f'(z_0) = 0$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, d.h. $f(z) = \text{const.}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Folgerung: Wenn $f$ analytisch und nicht const. sein soll muß $f$ irgendwo Singularitäten haben!

Mittelwert-Eigenschaft analytischer Funktionen: Sei $f(z)$ analytisch auf $G$

Cauchy-Formel $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} dz \, \frac{f(z)}{z-z_0}$, parametrisiere den Kreis $\gamma(t): z_0 + Re^{it}$

Def von $\oint$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dt \, \underbrace{Re^{it} \cdot i}_{\dot{\gamma}(t)} \, \frac{f(z_0+Re^{it})}{Re^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \, f(z_0 + Re^{it})}$

d.h. $f(z_0)$ ist der Mittelwert über einen (bel.) Kreis um $z_0$!

! Theorem des maximalen Betrags: Wenn $f(z)$ analytisch in $G$ und $f$ ein Maximum innerhalb von $G$ hat, so ist $f$ auf $G$ konstant.

Oder umgekehrt: ein in $G$ analytisches $f \neq$ const. wird sein Maximum immer auf dem Rand von $G$ ($\partial G$) einnehmen. (Beweis mit Mittelwert-Eigenschaft)

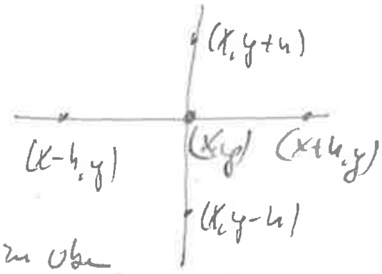
• Ein anschaulicher Nachtrag zu den Cauchy-Riemannschen Dgl. (S. 13) hierzu: Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ analytisch, d.h. $u$ und $v$ erfüllen CR und insbes. $\Delta u = 0 = \Delta v$. Dann können $u$ und $v$ keine lokalen Minima oder Maxima haben sondern nur Sattelpunkte.


Dann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x,y) - u(x-h,y)}{h}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x,x-h)}{h^2}$, ditto für $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Wegen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ muß für $h \to 0$ gelten: $u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y) \to 0$

d.h. $u(x,y)$ ist der Mittelwert über die umliegenden Punkte




· Um ein lokales Minimum (Maximum) zu sein heißt $u(x,y) \underset{(>)}{<} \{u(x\pm h,y), u(x,y\pm h)\}$ sein $\forall h$, $y$ zu oben.

• <u>Fundamentalsatz der Algebra</u> (erster Beweis v. C.F. Gauß mit anderen Methoden 1799)

Jedes Polynom $P_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots a_nz^n$ vom Grad $n\in\mathbb{N}_+$ hat mindestens eine Nullstelle $P_n(z_1)=0$. Dann folgt daß $P_n$ genau $n$ Nullstellen hat.

<u>Beweis:</u> Wir nehmen an, daß $P_n(z)$ <u>keine</u> Nullstellen hat in $\mathbb{C}$. Dann ist

$f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ überall auf $\mathbb{C}$ analytisch, und insbesondere beschränkt,

denn $|P_n(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$ wobei $a_nz^n$ dominiert, d.h. $\frac{1}{|P_n(z)|}\xrightarrow[z\to\infty]{}0$.

Laut Liouville muß dann $\frac{1}{P_n(z)}$ = const. sein, was ein Widerspruch zu $n\in\mathbb{N}_+$ ist. Also hat $P_n(z)$ mind. eine Nullstelle $z_1$.

$\Rightarrow P_n(z)=(z-z_1)\,Q_{n-1}(z)$, mit $Q_{n-1}(z)$ vom Grad $n-1$. Dasselbe Argument gilt mit $Q_{n-1}(z)$, usw. bis wir beim konstanten Polynom vom Grad 0 angekommen sind.

* <u>Allgemeine Bemerkungen zu Polen</u>

| eine isolierte Singularität $z_0$ einer analytischen Funktion $f(z)$ heißt | Wenn der Hauptteil der Laurententwicklung von $f$ |
|---|---|
| • <u>hebbar</u> | • Null ist |
| • <u>Pol N-ter Ordnung</u> | • von der Form $\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}$ |
| • <u>wesentlich</u> | • unendlich viele Koeffizienten $a_n\neq 0$ in $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ |

• d.h. hebbare Singularitäten sind eigentlich keine Singularitäten

z.B. ist $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ eine ganze, d.h. auf $\mathbb{C}$ analytische Fkt,

mit Potenzreihe $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$, die Sing. bei $z_0 = 0$ ist hebbar.

• bei Polen divergiert der Limes $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}\right| = \infty$
(hier $N$-ter Ordnung)

Riemannscher Hebbarkeitssatz

Ist $f(z)$ analytisch, mit isolierter Singularität bei $z_0$ in einer punktierten Kreisscheibe beschränkt, dann ist die Singularität hebbar.

Beweisidee: wir zeigen für jeden Koeff im Hauptteil $a_{-n}$ daß er verschwindet: S. 46, für alle $n = 1, 2, \ldots$ ML

$$|a_{-n}| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\varepsilon} dw \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\right| \underset{<a}{\leq} \frac{1}{2\pi} 2\pi\varepsilon \underbrace{\max_{z} |f(z)|}\, \varepsilon^{+n-1} = C\varepsilon^n \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

denn $f(z)$ ist analytisch bel. nah bei $z_0$, wähle $r_1 = \varepsilon$

wenn beschränkt ist dies eine $\varepsilon$-unabh. Konstante $C$

• Betrachten wir Singularitäten von Quotienten von Funktion $g(z)$ und $h(z)$: $\boxed{f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}}$

• Wenn $g$ und $h$ analytisch bei $z_0$ und $g$ eine $k$-fache Nullstelle sowie $h$ eine $m$-fache Nullstelle hat, dann gilt

– $f(z)$ hat eine hebbare Singularität bei $z_0$ falls $k \geq m$

– $f(z)$ hat einen Pol der Ordnung $m-k$ falls $m > k$

Beispiel: $\sin(z)$ hat bei $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ einfache Nullstellen

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ hat an diesen Stellen einfache Pole

- In der Nähe von wesentlichen Singularitäten variiert die Funktion so stark, daß sie fast jeden beliebigen Wert annehmen kann. (Großer Satz von Picard)

  z.B. nimmt die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z-z_0}} = w$ in einer punktierten Kreisscheibe um $z_0$ mit beliebigem Radius $\varepsilon > 0$ jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ an außer $w = 0$!

- Residuenbestimmung von $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

Seien $g(z)$ und $h(z)$ analytisch

$\Rightarrow$ die möglichen Pole von $f(z)$ liegen bei den Nullstellen von $h(z)$.

Um das Residuum zu bestimmen von $f(z)$ müssen wir unterscheiden, von welcher Ordnung der Pol ist:

i) $h(z)$ hat bei $z_0$ eine einfache Nullstelle: $\Rightarrow f$ hat einfachen Pol

d.h. $h(z) = (z-z_0)\, h'(z_0) + O(z-z_0)^2$ (Potenz = Taylorreihe bei $z_0$)

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + O(z-z_0)}{(z-z_0)\, h'(z_0)\,(1 + O(z-z_0)^2)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \frac{1}{(z-z_0)} + O(z-z_0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

(= Koeff $a_{-1}$ in Laurentreihe bei $z_0$ von $f(z)$)

(falls $g(z_0)$ ebenfalls Null ist war die Singularität von $f(z)$ hebbar und $\lim_{z \to z_0} f(z) = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}$ )

ii) $h(z)$ hat eine $k$-fache Nullstelle bei $z_0$: $\Rightarrow f$ hat Pol $k$-ter Ordnung

$$\Rightarrow h(z) = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \left(1 + O(z-z_0)\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \ldots + \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1} + O(z-z_0)^k}{\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \left(1 + O(z-z_0)\right)}$$

ergibt Term $\frac{1}{(z-z_0)^1}$