- In der Nähe von wesentlichen Singularitäten variiert die Funktion so stark, daß sie fast jeden beliebigen Wert annehmen kann. (Großer Satz von Picard)

  z.B. nimmt die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z-z_0}} = w$ in einer punktierten Kreisscheibe um z_0 mit beliebigem Radius $\varepsilon > 0$ jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ an außer $w = 0$!

- Residuenbestimmung von $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

Seien $g(z)$ und $h(z)$ analytisch

$\Rightarrow$ die möglichen Pole von $f(z)$ liegen bei den Nullstellen von $h(z)$.

Um das Residuum zu bestimmen von $f(z)$ müssen wir unterscheiden, von welcher Ordnung der Pol ist:

i) $h(z)$ hat bei z_0 eine einfache Nullstelle: $\Rightarrow f$ hat einfachen Pol

d.h. $h(z) = (z-z_0)\,h'(z_0) + O(z-z_0)^2$ (Potenz = Taylorreihe bei z_0)

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + O(z-z_0)}{(z-z_0)\,h'(z_0)\,(1+O(z-z_0)^2)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,\frac{1}{(z-z_0)} + O(z-z_0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$ (= Koeff. an in Laurentreihe bei z_0 von $f(z)$)

(falls $g(z_0)$ ebenfalls Null ist, war die Singularität von $f(z)$ hebbar und $\lim_{z\to z_0} f(z) = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}$)

ii) $h(z)$ hat eine k-fache Nullstelle bei z_0: $\Rightarrow f$ hat Pol k-ter Ordnung

$$\Rightarrow h(z) = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\,(1+O(z-z_0))$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \dots + \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1} + O(z-z_0)^k}{\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\,(1+O(z-z_0))}$$

ergibt Term $\frac{1}{(z-z_0)^1}$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0} f(z) = \mathrm{Res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{k\, g^{(k-1)}(z_0)}{h^{(k)}(z_0)}$$

iii) $f(z)$ hat einen Pol höchstens k-ter Ordnung (z.B. S.50 die Differenz der Ordnungen der Nullstelle vorhanden ist k)

d.h. $(z-z_0)^k f(z)$ hat eine hebbare Singularität

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + \dots$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \dots + a_{-2}(z-z_0)^{k-2} + \underline{a_{-1}(z-z_0)^{k-1}} + a_0 (z-z_0)^k + \dots$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-z_0)^k f(z) \right\} \Big|_{z=z_0}$$

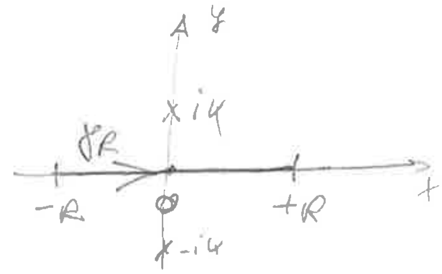
* Bei der Bestimmung von Integralen mittels Residuensatz bestimmen die Residuen an den Polen, gegeben durch die Funktionswerte u. Ableitungen an den Polen das Integral, s.o.

Weitere Beispiele zur Bestimmung von reellen Integralen:

$$\boxed{I(a,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos(ax)}{x^2+k^2}}$$, komplexifiziere $e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$

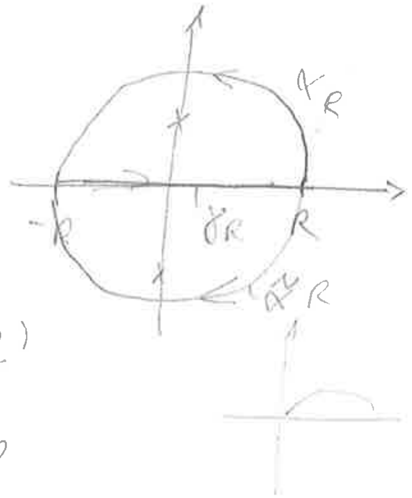
betrachte $J(a,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{iax}}{x^2+k^2}$ mit $I(a,k) = \mathrm{Re}\, J(a,k)$

$$J_R(a,k) = \int_{\gamma_R} dz\, \frac{e^{iaz}}{z^2+k^2} = \int_{\gamma_R} dz\, \frac{e^{iaz}}{(z-ik)(z+ik)}$$



und $\lim_{R\to\infty} J_R(a,k) = J(a,k)$. Warum integrieren wir über e^{iaz} und nicht $\cos(az)$?

Damit der Hilfsweg α_R der den Integrationsweg schließt verschwindet:



$\alpha_R: Re^{i\varphi} = R\cos\varphi + iR\sin\varphi, \quad R>k, \ \varphi\in(0,\pi)$

$\Rightarrow$ im Integrand $e^{iaz} = e^{ia(R\cos\varphi + i\underbrace{R\sin\varphi}_{>0})}$

$= e^{iaR\cos\varphi}\, e^{-aR\sin\varphi}$

$\Rightarrow \left|\frac{e^{iaz}}{z^2+k^2}\right| \leq \ldots \leq \frac{1}{R^2-k^2}\left|e^{iaR\cos\varphi}\right| \left|e^{-aR\sin\varphi}\right| \xrightarrow[R\to0]{} 0$

nur wenn $a>0$!

d.h. mittels ML-Lemma können wir das $\int_{\alpha_R}$ abschätzen

(für $a<0$ gewinnt $\frac{e^{+|a|R\sin\varphi}}{R^2+k^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty$)

$\left|\int_{\alpha_R} dz\, \frac{e^{iaz}}{z^2+k^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-k^2}\, e^{-aR\sin\varphi} \cdot \pi R \to 0$

$\Rightarrow$ für $a>0$ $\boxed{J(a,k) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma=\gamma_R\cup\alpha_R} dz\, \frac{e^{iz a}}{z^2+k^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{ik} \frac{e^{iza}}{z^2+k^2} = 2\pi i\, \frac{e^{i(ik)a}}{ik+ik} = \frac{\pi}{k} e^{-ka}}$ $\in \mathbb{R}$

vorherige Seite, oder Cauchy Formel für $\left(\frac{e^{iza}}{z+ik}\right)\frac{1}{z-ik}$

$\Rightarrow I(a,k) = \operatorname{Re} J(a,k) = \frac{\pi}{k} e^{-ka}$ für $a>0$

und $\operatorname{Im} J(a,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin ax}{x^2+k^2} = 0$ — da der Integrand ungerade in x

$\underline{a<0}$: hier müssen wir den Integrationsweg nach unten schließen $\tilde{\alpha}_R$

da dann $e^{iaz} = e^{iaR\cos\varphi}\, \underbrace{e^{-aR\sin\varphi}}_{\Rightarrow <0}$ $\quad a<0,\ \sin\varphi<0$ für $\varphi\in(0,-\pi)$

$\Rightarrow J(a,k) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma=\gamma_R\cup\tilde{\alpha}_R} dz\, \frac{e^{iaz}}{z^2+k^2} = (-)\, 2\pi i \operatorname{Res}_{-ik} \frac{e^{iaz}}{z^2+k^2} = -2\pi i\, \frac{e^{i(-ik)a}}{-ik-ik} = +\frac{\pi}{k} e^{ka}$

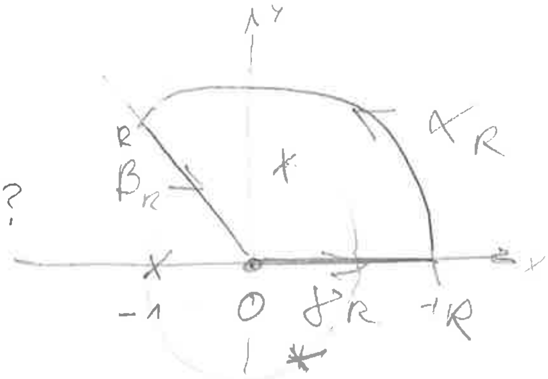
Orientierung

und $a = -|a|$ für $a<0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos ax}{x^2+k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{iax}}{x^2+k^2} = \frac{e^{-k|a|}\cdot\pi}{k}$$ ($a=0$ hatten wir schon)

• dasselbe Integral werden wir später bei der Lösung von Differentialgl. mittels Fouriertransformation wieder antreffen.

Beispiel $\boxed{I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}}$ $\quad I_R = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3}$



mit $\lim_{R\to\infty} I_R = I$. , Pole, wie γ_R schließen?

Nennernullstellen:
$0 = 1+z^3 \Leftrightarrow \underline{z^3 = -1}$

Siehe "Einheitswurzeln": $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right)}$ $\quad n=0,1,2$ $\quad$ 3 Lösungen

$= \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, \underbrace{e^{i\pi}}_{-1}, e^{-\frac{\pi}{3}} \right\}$ Argument wegen $\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

d.h. Pole bei $z = \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, -1, e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$

• Können wir einen Hilfsweg finden, auf dem der Nenner $\frac{1}{1+z^3}$ einfach ist?

$\underline{z = x e^{i\varphi}}$, $\quad z^3 = x^3 (e^{i\varphi})^3$

Einheitswurzeln: es ist $(e^{i\varphi})^3 = 1$ für $\varphi = \frac{2\pi}{3} n$, $\quad n=0,1,2$

d.h. $\varphi = 0$ (wie auf γ_R), $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ und $\varphi = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

→ integriere entlang $\varphi = \frac{2\pi}{3}$
und schließe $\frac{1}{3}$-Kreis mit α_R

$$\int_{\beta_R} dz\, \frac{1}{1+z^3} = \int_R^0 dx \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1+x^3 e^{3\cdot\frac{2\pi i}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} (-) \underbrace{\int_0^R \frac{dx}{1+x^3}}_{= I_R}$$ ~ gesuchtes Integral. Phase

• ergibt der Anteil über α_R wieder null?

Parametrisiere $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, Abschätzung des Integranden:

$$\left|\frac{1}{1+z^3}\right| = \sqrt{\frac{1}{(1+R^3e^{3i\varphi})(1+R^3e^{-3i\varphi})}} = \frac{1}{\sqrt{(R^6+1+2R^3\cos 3\varphi)}} \le \frac{1}{\sqrt{(R^3-1)^2}} = \frac{1}{R^3-1}, \quad R \gg 1$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\alpha_R} dz \frac{1}{1+z^3}\right| \leq \frac{1}{R^3-1} \cdot \frac{2\pi}{3} R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R \cup \alpha_R \cup \beta_R} \frac{dz}{1+z^3} = \lim_{R\to\infty}\left(\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) I_R\right) + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} dz \frac{1}{1+z^3}}_{\leq 0}$$

$$= \left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) I = 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{1}{1+z^3} = 2\pi i \oint_{|z-e^{\frac{i\pi}{3}}|=\varepsilon} dz \frac{1}{(z-e^{\frac{i\pi}{3}})} \underbrace{\frac{1}{(z-(-1))(z-e^{-\frac{i\pi}{3}})}}_{g(z)}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{\left(e^{\frac{i\pi}{3}}+1\right)\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\pi \cdot 2i}{\underbrace{\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)}_{=+e^{i\pi}e^{\frac{2\pi i}{3}}=e^{-\frac{i\pi}{3}}}\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)} = \frac{\pi}{\left(1+e^{-\frac{i\pi}{3}}+e^{+\frac{i\pi}{3}}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\left(2+2\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}}$$

* Berechnung von Integralen mittels Residuensatz, die in der komplexen Ebene Schnitte oder entlang des Integrationsweges Singularitäten haben:

<u>Beispiel</u> $\quad I = \int_0^\infty dx \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, $\quad f(z) = \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}$

hat einen einfachen Pol bei $z=-1$ und einen Wurzelschnitt.

- die Wurzel auf $\mathbb{C}$ ist keine eindeutige Funktion (hier zweiltg), deshalb der Schnitt. Wo wir den Schnitt hinlegen ist Konvention, bisher: Sprung zwischen $+\pi$ und $-\pi$ (d.h. $=\mathbb{R}_-$). Hier wählen wir bei 0 und 2π, dann der Pol $\notin$ Schnitt: