$$\Rightarrow \left|\int_{\alpha_R} dz \frac{1}{1+z^3}\right| \leq \frac{1}{R^3-1} \cdot \frac{2\pi}{3} R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R \cup \alpha_R \cup \beta_R} \frac{dz}{1+z^3} = \lim_{R\to\infty}\left(\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) I_R\right) + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} dz \frac{1}{1+z^3}}_{=0}$$

$$= \left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) I = 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{1}{1+z^3} = 2\pi i \oint_{|z-e^{\frac{i\pi}{3}}|=\varepsilon} dz \frac{1}{(z-e^{\frac{i\pi}{3}})} \cdot \underbrace{\frac{1}{(z-(-1))(z-e^{-\frac{i\pi}{3}})}}_{g(z)}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{\left(e^{\frac{i\pi}{3}}+1\right)\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\pi \, 2i}{\underbrace{\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)}\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)} = \frac{\pi}{\left(1+e^{-\frac{i\pi}{3}}+e^{+\frac{i\pi}{3}}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$-1 \cdot e^{i\pi} e^{\frac{2\pi i}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\left(2+2\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}}$$

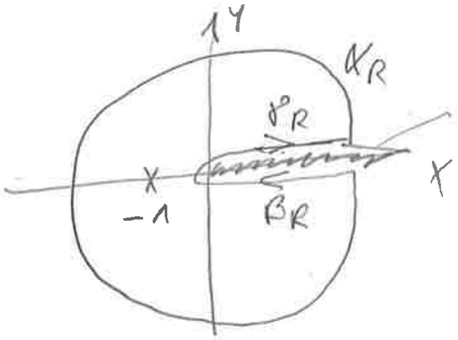
* Berechnung von Integralen mittels Residuensatz, die in der komplexen Ebene Schnitte oder entlang des Integrationsweges Singularitäten haben:

<u>Beispiel</u> $I = \int_0^\infty dx \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, $f(z) = \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}$

hat einen einfachen Pol bei $z=-1$ und einen Wurzelschnitt.

- die Wurzel auf $\mathbb{C}$ ist keine eindeutige Funktion (hier zweideutig), deshalb der Schnitt. <u>Wo</u> wir den Schnitt hinlegen ist Konvention, bisher: Sprung zwischen $+\pi$ und $-\pi$ (d.h. $=\mathbb{R}_-$). Hier wählen wir bei 0 und 2π, dann ist der Pol $\notin$ Schnitt:

Kontur:



Γ-Schnitt

mit • $\gamma_R : [0, R]$ oberhalb der x-Achse,

• $\beta_R : [R, 0]$ unterhalb der x-Achse

• α_R: Re^{it}, $t \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} dz \frac{1}{(z+1)\sqrt{z}} = I \quad \text{(kein Hauptwert mehr!)}$$

• auf β_R: $z = x e^{2\pi i} \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{x}\, e^{i\pi} = -\sqrt{x}$ (auf γ_R $z = x \underbrace{e^{i0}}_{1} \Rightarrow \sqrt{z} = +\sqrt{x}$)

$$\Rightarrow \int_{\beta_R} dz \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} = \int_R^0 dx \frac{1}{(1+x)(-\sqrt{x})} = \int_0^R dx \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}, \text{ d.h. } \lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = I \text{ ebenfalls}$$

• Wegen des Schnittes ($\Rightarrow$ Sprung im Vorzeichen von $\sqrt{x}$) heben sich die Integrale entlang von γ_R und β_R nicht gegenseitig weg!

• $\int_{\alpha_R} dz \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}$ mittels ML-Lemma abschätzen

$$\left|\frac{1}{1+Re^{it}}\right| \overset{S.44}{=} \sqrt{\frac{1}{(1+Re^{it})(1+Re^{-it})}} = \frac{1}{\sqrt{(1+R^2+2R\cos t)}} \le \frac{1}{R-1} \quad \text{f. } R>1$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\alpha_R} dz \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}\right| \le \frac{2\pi R}{(R-1)\sqrt{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{2\pi}{\sqrt{R}} \to 0$$

Pol ist bei $z = -1 = e^{i\pi}$

$$\Rightarrow 2I = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R \cup \beta_R \cup \alpha_R} dz \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} = \frac{2\pi i}{\sqrt{e^{i\pi}}} = 2\pi$$

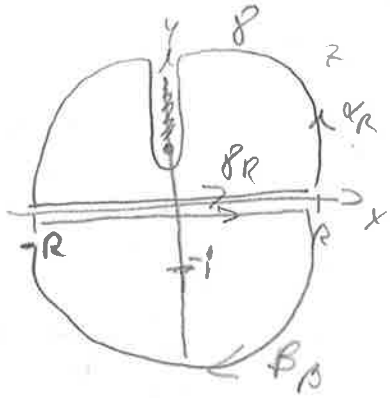
$\sqrt{e^{i\pi}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_0^\infty dx \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi}$$

check: ist reell, Pol $x^{-\frac{1}{2}}$ ist integrierbar auf $\int_0^1$, und Integral $\int_1^\infty$ existiert da Nenner $\underset{x\gg 1}{\sim} x^{\frac{3}{2}>1}$

Beispiel $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\log(x-i)}{(x+i)^2}$ * (dies ist zwar ein reelles Integral, aber wir können hier die Integration entlang des Schnittes des Log üben)

- $f(z) = \frac{\log(z-i)}{(z+i)^2}$ hat einen Pol der Ordnung 2 bei $z = -i$



- wir legen den Schnitt des Logarithmus nach oben, von $z = +i$ entlang der imaginären Achse

* hier wählen wir den Weg $\gamma_R \cup \beta_R$, in der Übung zeigen Sie daß dasselbe herauskommt für $\gamma_R \cup \alpha_R$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} dz \, \frac{\log(z-i)}{(z+i)^2} = P\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\log(x-i)}{(x+i)^2}$$

und entlang β_R: $\left|\frac{1}{(z+i)^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{(Re^{it}+i)^2(Re^{-it}-i)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(R^2+1+\underbrace{iR(e^{it}-e^{-it})}_{=2R\sin t \,\geq\, -2R})^2}} \le \frac{1}{(R-1)^2}$

und $|\log(Re^{it}-i)| \xrightarrow[R\to\infty]{} \log R$

$$\Rightarrow \left|\int_{\alpha_R} dz \, \frac{\log(z-i)}{(z+i)^2}\right| \le 2\pi R \, \frac{\log R}{(R-1)^2} \approx \frac{2\pi \log R}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\mathrm{Res}_{-i}\left(\frac{\log(z-i)}{(z+i)^2}\right) 2\pi i} = 2\pi i(-1)\oint_{|z+i|=\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \, \frac{\log(z-i)}{(z-(-i))^2} = -2\pi i \, \log(z-i)'\Big|_{z=-i}$$

$$= -2\pi i \, \frac{1}{z-i}\Big|_{z=-i} = \boxed{\pi}$$

* zur Erinnerung $\log(x-i) = \log r + i(\varphi + 2\pi k)$, $x - i = re^{i\varphi}$

s. S. 11

Beispiel $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin x}{x}$, der Integrand $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ hat hebbare Singularität bei $z=0$: S. 50

$\Rightarrow$ wir dürfen den Weg γ_R deformieren in $\tilde{\gamma}_R$

mit $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} dz \, \frac{\sin z}{z} = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin x}{x}$

- es gilt: $\int_{\tilde{\gamma}_R} dz \, \frac{\sin z}{z} = \int_{\tilde{\gamma}_R} dz \, \frac{1}{2iz} e^{iz} - \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{dz}{2iz} e^{-iz}$

$\Rightarrow$ diese Integranden haben nun beide einen Pol bei $z=0$.

- wie wir auf S. 53 gesehen haben können wir für das 1. Integral den Weg $\tilde{\gamma}_R$ mit α_R in die obere Halbebene schließen, so daß α_R im limes $R\to\infty$ keinen Beitrag gibt. Da hier kein Pol enthalten ist gilt das Integral 0. Für das 2. Integral mit $\frac{e^{-iz}}{z}$ schließen wir mit $\tilde{\alpha}_R$ in der unteren Halbebene, dort gibt dies einen Beitrag:

$$\Rightarrow P \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin x}{x} = \lim_{R\to\infty} \Big(\underbrace{\oint_{\tilde{\gamma}_R \cup \alpha_R} dz \, \frac{e^{iz}}{2iz}}_{0} + \oint_{\tilde{\gamma}_R \cup \tilde{\alpha}_R} dz \, \frac{e^{-iz}}{2iz} \Big)$$

gibt positive Orientierung

$$= 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z=0} \frac{e^{-iz}}{2iz} = 2\pi i \, \frac{e^{-i0}}{2i} = \pi .$$

Bemerkung: wir hätten dasselbe Resultat gefunden, wenn wir

γ_R  zu $\tilde{\gamma}_R$  deformiert hätten.

Dann wäre der Beitrag vom 1. Integral gekommen.

Beispiel $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin^2 x}{x^2}$, hat wieder eine hebbare Singularität bei $z=0$

$$\Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} dz \, \frac{1}{z^2} \frac{1}{(2i)^2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} dz \frac{(-1)}{4z^2}\left(e^{2iz} - 2 + e^{-iz}\right)$$

verwende α_R egal   verwende $\tilde{\alpha}_R$

1. Integral gibt keinen Beitrag

2. Integral: Wahl α_R gibt keinen Beitrag,
Wahl $\tilde{\alpha}_R$ gibt $+\int_{\tilde{\gamma}_R \cup \tilde{\alpha}_R} dz \, \frac{\frac{1}{2}}{z^2} = -\left(\frac{1}{2}\right)' = 0$ ✓

3. Integral:

$$\int_{\tilde{\gamma}_R \cup \tilde{\alpha}_R} dz \, \frac{-e^{-2iz}}{4z^2} = \underset{\text{Orientierung}}{-} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{-e^{-2iz}}{4z^2} = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-2iz}\right)'\Big|_{z=0} = \frac{\pi i(-2i)}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$$

I.9 Kramers-Kronig Relation und weitere Beispiele [Arfken 7.2-3]

Was passiert, wenn auf dem Integrationswege ein Pol liegt?
I.A. ist das Integral nicht definiert, aber mit weiteren Informationen sind sinnvolle Definitionen möglich