Operator verschwindet $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{\mathbb{O}}$.

"$\Rightarrow$": Seien $|a, i\rangle$ die Eigenzustände von $\hat{A}$, d.h.

$\hat{A}|a,i\rangle = a\,|a,i\rangle$. Dann gilt wegen $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}]$
$\Leftrightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} + [\hat{A}, \hat{B}]$

für alle diese Zustände

$$\hat{A}\left(\hat{B}|a,i\rangle\right) = \left(\hat{B}\hat{A} + \underbrace{[\hat{A}, \hat{B}]}_{=\hat{\mathbb{O}}}\right)|a,i\rangle = a\,\hat{B}|a,i\rangle \text{, d.h.}$$

$\hat{B}|a,i\rangle$ ist ebenfalls Eigenzustand zu $\hat{A}$ mit dem selben Eigenwert a.

Daher können wir $\hat{B}|a,i\rangle$ als Linearkombi aller a-Eigenzustände schreiben:

$$\hat{B}|a,i\rangle = \sum_j b_{ji}\,|a,j\rangle \quad \text{mit} \quad b_{ji} = \langle a,j|\,\hat{B}\,|a,i\rangle.$$

D.h. $\hat{B}$ wirkt wie eine Matrix auf der Basis $\{|a,i\rangle\}$ und kann diagonalisiert werden. In dieser neuen Basis $|a,b\rangle$ sind die Zustände ebenfalls Eigenzustände von $\hat{B}$. $\square$

- Wenn $\boxed{[\hat{A}, \hat{B}] = i\,\hat{C} \neq \hat{\mathbb{O}}}$ gilt ist eine gleichzeitige "Diagonalisierung" nicht möglich und die Eigenwerte von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ können nicht unabh. voneinander bestimmt werden.

Für einen Zustand $|\psi\rangle \in V$ definieren wir

$$(\Delta A)^2 \equiv \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle \quad \text{Varianz von } \hat{A}$$

$$(\Delta B)^2 \equiv \langle\psi|(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)^2|\psi\rangle \quad \text{" " } \hat{B}$$

In Ü7 werden wir zeigen daß $\boxed{\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\,|\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle|}$ gilt.
(Beweis mit Schwarzscher Ungl. Ü6.2)

* Insbesondere gilt dann wegen $[\hat{X}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\,\delta_{jk} \neq \hat{\mathbb{O}}$

die Heisenbergsche Unschärferelation ($\hat{C} = \hbar\,\hat{\mathbb{1}}$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$)

für Orts- und Impulsoperator.

3.3. Zeitentwicklung von Zuständen und Operatoren [Münster 8.1–8.3, Fließbach V 33, VI 35]

zeitunabhängige Schrödi: $\boxed{\hat{H}|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle}$ (oder $|\psi_E\rangle = |E\rangle$)
(s. S. 53–55)

zu Ql: zeitabhängige Schrödi: $\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle}$ d.h. der Hamilton-Op. $\hat{H}$ erzeugt die Zeitentwicklung
(im Schrödinger-Bild)

wobei wir die Lsg. dieser Gl mit $|\psi(t)\rangle$ bezeichnen.

<u>Def</u>: Zeitentwicklungsoperator $\boxed{\hat{U}(t;t_0): \quad \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle}$

Dieser erfüllt die Gleichung $\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0) = \hat{H}\,\hat{U}(t,t_0)$

mit Randbedingung $\quad \hat{U}(t_0,t_0) = \hat{\mathbb{1}}$

• <u>Eigenschaften</u> des Zeitentwicklungsoperators:

(i) $\hat{U}(t,t_0)$ ist <u>unitär</u>, d.h. $\boxed{\hat{U}(t,t_0)^{+}\hat{U}(t,t_0) = \hat{\mathbb{1}}}$ $\forall\, t, t_0$:

Zeitabh. Schrödi für bra-Vektor $\langle\psi(t)|$:

$$\langle i\hbar\frac{d}{dt}\psi_1(t)| \underset{\text{antilinear}}{=} -i\hbar\langle\frac{d\psi_1(t)}{dt}| = \langle\hat{H}\psi_1(t)| = \langle\psi_1(t)|\hat{H}^{+}$$

$|\cdot|\psi_2(t)\rangle$, benutzen daß $\hat{H} = \hat{H}^{+}$ hermitesch ist, $|\psi_2(t)\rangle$ erfüllt auch Schrödi

$$\Rightarrow +i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle \underset{\uparrow}{=} -\langle\psi_1(t)|\hat{H}^{+}|\psi_2(t)\rangle + \langle\psi_1(t)|\hat{H}|\psi_2(t)\rangle = 0$$

Produktregel

d.h. $\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle$ ist zeitunabhängig; damit dies gilt

muß $\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\hat{U}(t,t_0)\psi_1(t_0)|\hat{U}(t,t_0)\psi_2(t_0)\rangle$

$$= \langle\psi_1(t_0)|\underbrace{\hat{U}^{+}(t,t_0)\hat{U}(t,t_0)}_{\Rightarrow\ \hat{\mathbb{1}}}|\psi_2(t_0)\rangle = \langle\psi_1(t_0)|\psi_2(t_0)\rangle \text{ sein}$$

(18) Formal können wir die Differentialgleichung für $\hat{U}(t,t_0)$ wie folgt lösen: $\boxed{\hat{U}(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right)}$ $\Rightarrow \hat{U}^\dagger(t,t_0) = e^{+\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}^\dagger}$

wobei die Exponentialfunktion durch ihre Taylorreihe definiert ist, siehe Ü6.3. Einsetzen ergibt: $e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!} = \hat{1} + \hat{A} + \dots$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n(t-t_0)^n\hat{H}^n$$

$$= i\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n(t-t_0)^{n-1}\hat{H}^n \qquad n'=n-1$$

$(n-1)!$

$$= \hat{H}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{1}{n'!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n'}(t-t_0)^{n'}\hat{H}^{n'} = \hat{H}\hat{U}(t,t_0).$$

Außerdem gilt offensichtlich $\hat{U}(t_0,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\underbrace{(t_0-t_0)}_{0}\hat{H}\right) = e^{\hat{0}} = \underline{\hat{1}}$.

→ Folgerungen für die Zeitentwicklung von Zuständen und Erwartungswerten:

a) Zeitentwicklung in der Energieeigenwertbasis $|E\rangle \equiv |\psi_E\rangle$

Anfangszustand $|\psi(t_0)\rangle = \sum_E |E\rangle\langle E|\psi(t_0)\rangle$ Vollständigkeitsrelation, im diskreten Fall

$$= \sum_E c_E|E\rangle, \quad c_E = \langle E|\psi(t_0)\rangle = \psi_E(t_0)$$

Dann gilt $\underline{|\psi(t)\rangle} = \sum_E c_E\, e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}|E\rangle$, s. S. 14 im diskreten

$$= \sum_E c_E \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}}_{\hat{U}(t,t_0)}|E\rangle \qquad \text{da } \hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$$

$$= \hat{U}(t,t_0)\sum_E c_E|E\rangle = \underline{\hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle}$$

• Wahrscheinlichkeit, den Energieeigenwert E' im Zustand $\psi(t)$ zu finden:

$$P_\psi(E') = |\langle E'|\psi(t)\rangle|^2 = \Big|\sum_E c_E\, e^{-\frac{iE}{\hbar}(t-t_0)}\underbrace{\langle E'|E\rangle}_{\delta_{E,E'}}\Big|^2$$

$$= \left|c_{E'}\, e^{-i\frac{E'}{\hbar}(t-t_0)}\right|^2 = |c_{E'}|^2 = |\langle E'|\psi(t_0)\rangle|^2$$

d.h. diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von t, obwohl

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle \underset{i.A.}{\neq} |\Psi(t_0)\rangle$$

(dies gilt für jede unitäre Konjugation eines Zustandes $|\Psi\rangle \to U|\Psi\rangle$)

b) Zeitentwicklung von Erwartungswerten

• für Operatoren $\hat{A}$, die nicht von der Zeit abhängen, gilt Folgendes:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle \overset{S.57}{=} -\langle\hat{H}\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle + \langle\Psi(t)|\hat{A}|\hat{H}\Psi(t)\rangle$$

Produktregel

$$= -\langle\Psi(t)|\underbrace{\hat{H}^\dagger}_{=\hat{H}}\hat{A}|\Psi(t)\rangle + \langle\Psi(t)|\hat{A}\hat{H}|\Psi(t)\rangle$$

"Ehrenfestsches Theorem"

$$= \boxed{\langle\Psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\Psi(t)\rangle}$$

$\Rightarrow$ Der Erwartungswert ist zeitunabhängig genau dann wenn $[\hat{A},\hat{H}] = \hat{0}$ d.h. der Operator vertauscht mit dem Hamilton-operator (und kann deshalb gleichzeitig diagonalisiert und gemessen werden!)

Operatoren $\hat{A}$ die $[\hat{A},\hat{H}] = \hat{0}$ erfüllen heißen Erhaltungsgrößen.

* Zeitentwicklung von Zuständen vs. der von Operatoren

o bisher haben wir das sogenannte Schrödingerbild betrachtet:

- Zustände $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle$ sind zeitabhängig und erfüllen die zeitabhängige Schrödi. $i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$

- Operatoren sind (i.A.) zeitunabhängig: $\frac{d}{dt}\hat{A} = 0$, und nur deren Erwartungswerte $\langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle$ hängen von t ab, $= \langle\hat{A}\rangle(t)$