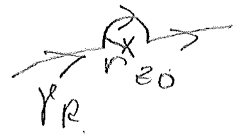
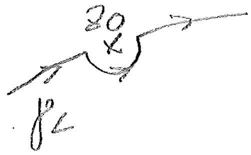
i) "Rechtswert": $\mathcal{R}\int_\gamma dz\, f(z) = \int_{\gamma_R} dz\, f(z)$



wobei γ_R den Pol der Funktion $f(z)$ bei z_0 rechts liegen läßt. Da f sonst analytisch ist die Def unabh. von Radius r.

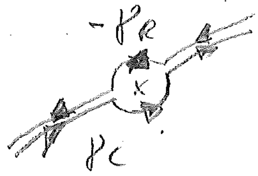
ii) "Linkswert": $\mathcal{L}\int_\gamma dz\, f(z) = \int_{\gamma_L} dz\, f(z)$



d.h. γ_L läßt den Pol links liegen.

Es gilt daß Links u. Rechtswert sich um das Residuum von f bei z_0 unterscheiden

$$\boxed{\mathcal{L}\int_{\gamma_L} dz\, f(z) - \mathcal{R}\int_{\gamma_R} dz\, f(z)}$$



$$= \oint_{\gamma_L-\gamma_R} dz\, f(z) = \boxed{\left(\text{Res}_{z_0} f(z)\right)\cdot 2\pi i}$$

iii) Hauptwert: betrachten wir der Einfachheit halber einen Pol x_0 auf der reellen Achse, und γ entlang $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$$\Rightarrow P\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon} dx\, f(x) + \int_{x_0+\varepsilon}^b dx\, f(x)\right)$$

• wenn der Pol von $f(z)$ 1. Ordnung ist so gilt

$$P\int_a^b dx\, f(x) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}+\mathcal{R})\int_\gamma dz\, f(z).$$

Beweis: $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-x_0}$ wobei $g(z)$ in Umgebung von x_0 analytisch ist.

parametrisiere $\gamma_{R/L}$ Bogen $\quad z - x_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$, mit $\varphi \in [\pi, 0]$ R
bzw $\in [-\pi, 0]$ L

- Beitrag des Bogens von γ_L:

$$\int_{-\pi}^{0} d\varphi\, i\varepsilon e^{i\varphi} \; \underbrace{\frac{g(x_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - g(x_0)}{\varepsilon e^{i\varphi}}}_{\varepsilon \to 0 \to g'(x_0)} + \frac{g(x_0)}{\varepsilon e^{i\varphi}} = g'(x_0) O(\varepsilon) + i\pi g(x_0)$$

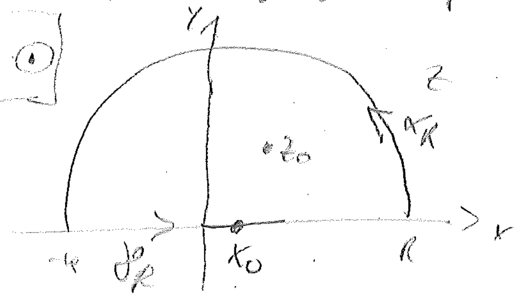
- Beitrag des Bogens von γ_R: dasselbe mit $\int_{-\pi}^{0} \to \int_{\pi}^{0} \dots = g'(x_0) O(\varepsilon) - i\pi g(x_0)$

$\Rightarrow$ die Beiträge der Bögen von γ_L und γ_R heben sich auf und

$P\int_a^b dx\, f(x)$ bleibt übrig.

* Ob dieses $\}$ dann auch existiert hängt von $f(x)$ ab!

<u>Anwendung</u>: Sei $f(z)$ analytisch auf der oberen Halbebene sowie auf $\mathbb{R}$
und es gelte $\boxed{\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0 \quad (\cdot)}$



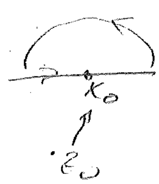
<u>Cauchy Formel</u>: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R \cup \alpha_R} dz\, \frac{f(z)}{z - z_0}$

unter der Annahme $(\cdot)$ trägt α_R f. $R \to \infty$ nicht bei

d.h. $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - z_0}}{2\pi i} = f(z_0)$ (hier Hauptwert bzgl. $\pm\infty$)

- Betrachte den limes $z_0 \to x_0$, d.h. wir haben  , d.h.

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} L \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{f(x)}{x - x_0}$$

- Wenn wir andererseits z_0 zuerst unterhalb der reellen Achse haben 

so gilt $0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R \cup \alpha_R} dz \frac{f(z)}{z - z_0} \xrightarrow[z_0 \to x_0]{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} R\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}$.

Wegen $\frac{1}{2}(L + R) = P$ für Pole 1. Ord. gilt:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{(x-x_0)}$$ (der Hauptwert bezieht sich hier auf den Pol bei x_0)

mit $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ haben wir für Real- und Im-Teil

$$\boxed{\begin{aligned} u(x_0,0) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{v(x,0)}{(x-x_0)} \\ v(x_0,0) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{u(x,0)}{(x-x_0)} \end{aligned}}$$

Kramers-Kronig Relation.
(hier sind $u = u(x)$, $v = v(x)$ Funktionen einer reellen Variablen, wie $f(x) = u(x) + i\,v(x)$)

D.h. wie wir bereits wissen sind $u(x,y)$ und $v(x,y)$ nicht unabh. für analytische $f(z)$ (C.R. S.13 $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$)

- In der Physik spielt diese KK-Relation eine wichtige Rolle in der Optik bzw. allgemein in der Streutheorie: $u = \mathrm{Re} f \Leftrightarrow$ Dispersion
  $v = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow$ Absorption

(umgekehrte)
Anwendung Residuensatz zur Berechnung unendlicher Reihen:

Beispiel $$\boxed{G(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi n \tau i}}{(2\pi n)^2 + \sigma^2}}, \quad 0<\tau<1, \ \sigma>0$$

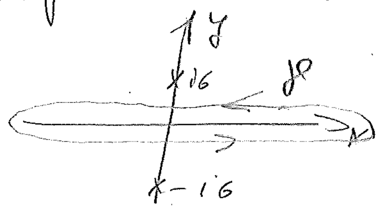
Betrachte Hilfsfunktion $\phi(ix) = \frac{1}{e^{ix}-1}$, mit Polen x_n bei $e^{ix} = 1$
d.h. $x_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Residuum bei x_n: entwickle um x_n und bestimme Koeff $\frac{1}{z}$:

$$\phi(i(x_n+z)) = \frac{1}{e^{ix_n}e^{iz}-1} \overset{x_n=2\pi n}{=} \frac{1}{e^{iz}-1} = \frac{1}{1+iz+\frac{(iz)^2}{2}+\ldots-1} = \frac{1}{iz(1+O(z))} = \frac{-i}{z} + O(z)$$

d.h. $\mathrm{Res}_{x_n} \phi(ix) = (-i) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Sei $f(z)$ eine in der Umgebung der reellen Achse analytische Funktion, die insbesondere keine Pole auf $\mathbb{R}$ hat



$$\Rightarrow \oint_\gamma dz\, f(z)\, \phi(iz) = 2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_{x_n}\, f(z)\,\phi(iz)$$

$$= 2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)(-i)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n) = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma dz\, f(z)\, \phi(iz)$$

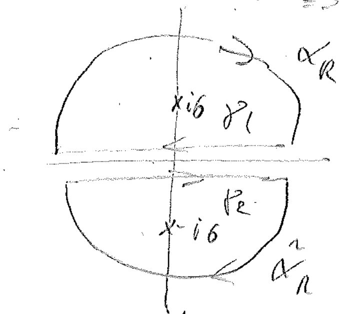
• Wähle nun $\boxed{f(z) = \frac{e^{iz\tau}}{z^2+\sigma^2}}$, $0<\tau<1$, $\sigma>0$ die alles erfüllt (analytisch für $\pm i\sigma$ außerhalb γ)

$$\Rightarrow G(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i x_n \tau}}{x_n^2+\sigma^2}, \quad x_n = 2\pi n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma dz\, \frac{e^{iz\tau}}{z^2+\sigma^2}\, \phi(iz)$$

$R(\cos t + i \sin t) = Re^{it}$, $\underline{t\in(0,\pi)}$ $\Rightarrow \sin t > 0$

Abschätzung:



$$\left|e^{iz\tau}\phi(iz)\right| = \left|\frac{e^{iz\tau}}{e^{iz}-1}\right| \quad \text{auf Hilfswegen } \alpha_R, \tilde\alpha_R$$

$1>\tau>0$

$$= \left|\frac{e^{iR\cos(t)\tau}\, e^{-R\tau\sin(t)}}{e^{iR\cos(t)}\underbrace{e^{-R\sin t}}_{\to 0\ (t>0),\ \infty\ (t<0)} - 1}\right| \to 0\ (t>0),\ \infty\ (t<0) \quad \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Re^{it} $\underline{t\in(\pi,2\pi)}$

$\Rightarrow \sin t < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{-R\tau\sin t}}{1} \to 0 & t>0 \\ e^{-R\overbrace{(\tau-1)}^{<0}\sin t} \to 0 & t<0 \end{cases}$$

, d.h. auf beiden Hilfswegen geht der Beitrag exponentiell $\to 0$ (also das Integral $\to 0$ nach ML-Lemma trotz $L = \pi R$)

$$\Rightarrow \oint_\gamma dz\, f(z)\,\phi(iz) = \oint_{\gamma_1\cup\alpha_R} dz\, f(z)\,\phi(iz) + \oint_{\gamma_2\cup\tilde\alpha_R} dz\, f(z)\,\phi(iz)$$

$$\Rightarrow \boxed{G(\tau)} = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\sigma} f(z)\phi(iz) - 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-i\sigma} f(z)\phi(iz)\right),$$

$$= i \operatorname{Res}_{z=i\sigma}\left(\underbrace{\frac{e^{iz\tau}\phi(iz)}{(z+i\sigma)}}_{g(z)}\frac{1}{(z-i\sigma)}\right) - i\operatorname{Res}_{z=-i\sigma}\left(\frac{1}{(z+i\sigma)}\underbrace{\frac{e^{iz\tau}\phi(iz)}{(z-i\sigma)}}_{g(z)}\right)$$

benutze Cauchy Formel

$$= i\,\frac{e^{-\sigma\tau}\frac{1}{e^{-\sigma}-1}\cdot\frac{e^{\sigma}}{e^{\sigma}}}{-2i\sigma} - i\,\frac{e^{+\sigma\tau}\frac{1}{e^{\sigma}-1}}{2i\sigma}$$

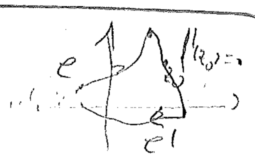
$$= \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{1}{e^{\sigma}-1}e^{\sigma(1-\tau)} - \frac{e^{\sigma\tau}}{e^{\sigma}-1}\right) = \boxed{\frac{1}{2\sigma}\,\frac{e^{\sigma(1-\tau)}+e^{\sigma\tau}}{e^{\sigma}-1}}$$

(= steepest descent)

- **Sattelpunktsnäherung und Stirlingformel:** [Altland 7.3]

Wie wir auf S. 48 gesehen haben kann eine auf G analytische Fkt $f(z)$ dort zwar Extremalstellen haben, $f'(z)=0$, allerdings sind diese immer Sattelpunkte (SP) und keine lokalen Minima oder Maxima.

Idee: Wir möchten Integrale der Form $I(s) = \int_{\mathcal{C}} dz\, g(z)\, e^{s f(z)}$ mit $s \in \mathbb{R}$, $g(z)$ und $f(z)$ analytisch, approximativ für großes s zu berechnen.



Hierzu bemerken wir, daß wir $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ deformieren können und legen $\mathcal{C}'$ so, daß es durch den SP bei $f'(z_0)=0$ geht (wir nehmen hier an, daß es nur einen SP gibt) und entlang des stärksten Abstiegs in Talrichtung geht.