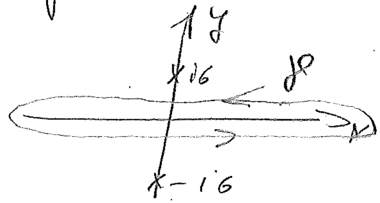
Sei $f(z)$ eine in der Umgebung der reellen Achse analytische Funktion, die insbesondere keine Pole auf $\mathbb{R}$ hat



$$\Rightarrow \oint_\gamma dz\, f(z)\,\phi(iz) = 2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_{x_n} f(z)\,\phi(iz)$$

$$= 2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)\,(-i)$$

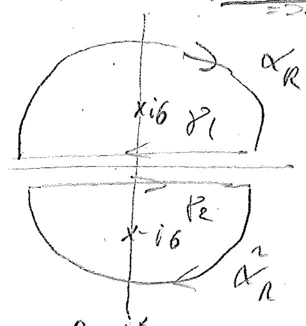
$$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n) = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma dz\, f(z)\,\phi(iz)$$

- Wähle nun $\boxed{f(z) = \frac{e^{iz\tau}}{z^2+\sigma^2}}$, $0<\tau<1$, $\sigma>0$ die dies erfüllt (analytisch für $\pm i\sigma$ außerhalb γ)

$$\Rightarrow G(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{ix_n\tau}}{x_n^2+\sigma^2}, \quad x_n = 2\pi n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma dz\, \frac{e^{iz\tau}}{z^2+\sigma^2}\,\phi(iz)$$

$R(\cos t + i\sin t) = Re^{it}$, $t\in(0,\pi)$ $\Rightarrow \sin t>0$



Re^{it} $t\in(0,-\pi)$

$\Rightarrow \sin t<0$

Abschätzung:

$$\left|e^{iz\tau}\phi(iz)\right| = \left|\frac{e^{iz\tau}}{e^{iz}-1}\right| \quad \text{auf Hilfswegen } \alpha_R, \tilde\alpha_R$$

$1>\tau>0$

$$= \left| \frac{e^{iR\cos(t)\tau}\, e^{-R\tau\sin(t)}}{\underbrace{e^{iR\cos(t)}\, e^{-R\sin t}}_{\to 0\ (t>0),\ \infty\ (t<0)} - 1} \right| \to 0\ (t>0),\ \infty\ (t<0), \quad \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{-R\tau\sin t}}{1} \to 0 & t>0 \\ e^{R\overbrace{(\tau-1)}^{<0}\sin t} \to 0 & t<0 \end{cases}$$

, d.h. auf beiden Hilfswegen geht der Beitrag exponentiell $\to 0$ (also das Integral $\to 0$ nach ML-Lemma trotz $L = \pi R$)

$$\Rightarrow \oint_\gamma dz\, f(z)\phi(iz) = \oint_{\gamma_1\cup\alpha_R} dz\, f(z)\phi(iz) + \oint_{\gamma_2\cup\tilde\alpha_R} dz\, f(z)\phi(iz)$$

$$\Rightarrow \boxed{G(\tau)} = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=i\sigma} f(z)\phi(iz) - 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=-i\sigma} f(z)\phi(iz)\right),$$

$$= -i\,\mathrm{Res}_{z=i\sigma}\Big(\frac{e^{iz\tau}\,\phi(iz)}{(z+i\sigma)\underbrace{(z-i\sigma)}_{g(z)}}\Big) - i\,\mathrm{Res}_{z=-i\sigma}\Big(\frac{e^{iz\tau}\,\phi(iz)}{(z+i\sigma)\underbrace{(z-i\sigma)}_{g(z)}}\Big)$$

benutze Cauchy Formel

$$= -i\,\frac{e^{-\sigma\tau}\,\frac{1}{e^{\sigma}-1}\cdot e^{\sigma}}{+2i\sigma} - i\,\frac{e^{+\sigma\tau}\,\frac{1}{e^{\sigma}-1}}{-2i\sigma}$$

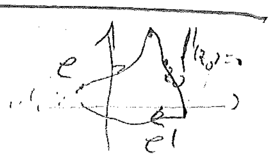
$$= \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{1}{e^{\sigma}-1}\,e^{\sigma(1-\tau)} + \frac{e^{\sigma\tau}}{e^{\sigma}-1}\right) = \boxed{\frac{1}{2\sigma}\,\frac{e^{\sigma(1-\tau)}+e^{\sigma\tau}}{e^{\sigma}-1}}$$

(= steepest descent)

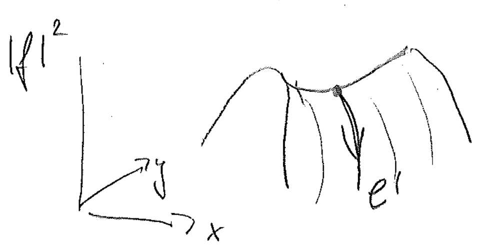
- Sattelpunktsnäherung und Stirlingformel: [Altland 7.3]

Wie wir auf S. 48 gesehen haben kann eine auf G analytische Fkt $f(z)$ dort zwar Extremalstellen haben, $f'(\zeta)=0$, allerdings sind diese immer Sattelpunkte (SP) und keine lokalen Minima oder Maxima.

Idee: Wir möchten Integrale der Form $I(s) = \int_{C} dz\, g(z)\, e^{s f(z)}$ mit $s \in \mathbb{R}$, $g(z)$ und $f(z)$ analytisch, approximativ für große s zu berechnen.



Hierzu bemerken wir, daß wir $C \to C'$ deformieren können und legen C' so, daß es durch den SP bei $f'(z_0)=0$ geht (wir nehmen hier an, daß es nur einen SP gibt) und entlang des stärksten Abstiegs in Talrichtung geht.



• An der Extremalstelle gilt $f(z) = f(z_0) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f'(z_0)}(z-z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 + O(z-z_0)^3$

$= f(z_0) + \frac{1}{2}\left(f''(z_0) + \varepsilon(z)\right)(z-z_0)^2$

für $\varepsilon = 0$ vernachlässigen wir

• der Einfachheit nehmen wir an, daß sich die Talrichtung entlang der reellen Achse legen läßt (allgem. Fall → Anm. 8.3)

$z = z_0 + x$, x reell $\Rightarrow$ $f''(z_0)(z-z_0)^2 = f''(z_0)x^2 = -t^2$, d.h. $f'' = -|f''|$

• wenn $g(t)$ entlang des Weges schwach variiert ergibt sich:

$$I(s) \approx \int_{C'} dt\, g(z_0)\, e^{s(f(z_0) - \frac{1}{2}|f''(z_0)| x^2)}$$

$$\approx g(z_0)\, e^{s f(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{s}{2}|f''(z_0)| x^2}$$

da wir für $s \gg 1$ durch die Ersetzung $\int_a^b \to \int_{-\infty}^{\infty}$ einen kleinen Fehler machen

$$= g(z_0)\, e^{s f(z_0)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s|f''(z_0)|}}, \quad \text{da} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

<u>Beispiel</u> $\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} dt\, t^z e^{-t}$ wir möchten dies für $z = s \gg 1$ approximieren $t = sw$

ist analytisch, s. S. 23

$$\overset{!}{=} s\int_0^{\infty} dw\, (sw)^s e^{-sw} = s^{s+1}\int_0^{\infty} dw\, \exp[-sw + s\ln w]$$

d.h. $g(w) = 1$, $f(w) = \ln w - w$, $f'(w) = \frac{1}{w} - 1 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow w_0 = 1$ ist SP

$f''(w) = -\frac{1}{w^2} = -\left|\frac{1}{w^2}\right|$ (hier $w \in \mathbb{R}$), $f(w_0 = 1) = \ln 1 - 1 = -1$

$$\Rightarrow \Gamma(s+1) \approx s^{s+1} e^{-s\cdot 1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s\left|\frac{1}{1^2}\right|}}$$

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}}$$

für $s \gg 1$. Dies ist die Stirling-Formel.

II Funktionenräume

II.1 Wiederholung Lineare Algebra

Def Vektorraum (VR) über Körper K

a) die Elemente $\underline{v}, \underline{w} \in V$ VR bilden eine abelsche Gruppe bzgl. Addition

$\underline{v}, \underline{w} \in V \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v} \in V$

mit Nullelement $\underline{0} \in V$: $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$ u. Inverses $-\underline{v}$: $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

b) für Elemente $\alpha, \beta \in K$ Körper (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) u. $\underline{v}, \underline{w} \in V$ gibt es eine skalare Multiplikation $K \times V \to V$: $\alpha \underline{v} \in V$ mit Eigenschaften

$\alpha(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha \underline{v} + \alpha \underline{w}$, $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}$, $\alpha(\beta \underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}$ (Assoziativ)

VR Beispiele sind $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$

- Basis: größte linear unabhängige Teilmenge in V $(\alpha_i \underline{e}_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \, \forall i)$

z.B. Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ in Komponenten $\boxed{(\underline{e}_i)_j = \delta_{ij}}$, $i,j = 1 \ldots n$

i: zählt Vektoren, j: Komponente

d.h. $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \forall \underline{v} \in V \; \exists$ eindeutige $v_i \in K$: $\underline{v} = v_i \underline{e}_i$ $\quad i = 1 \ldots n$ (Einsteins Konvention) summation über alle Elemente der Basis

- Lineare Abb von V, W beides K-VR: $L: V \to W$

mit $L(\underbrace{\alpha \underline{v}}_{\in V} + \beta \underbrace{\underline{w}}_{\in V}) = \alpha \underbrace{L(\underline{v})}_{\in W} + \beta L(\underline{w})$ $\quad (\alpha \in K)$

- Skalarprodukt: $= \text{Abb} \begin{cases} V \times V \to K \\ \underline{v}, \underline{w} \to \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \end{cases}$

mit folgenden Eigenschaften:

1.) symmetrisch/hermitesch $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle^*$ $(\Rightarrow \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R})$

2.) linear im 2. Argument $\langle \underline{u}, \alpha \underline{v} + \beta \underline{w} \rangle = \alpha \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \beta \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$

3.) antilinear im 1. Argument $\langle \alpha \underline{u} + \beta \underline{v}, \underline{w} \rangle = \alpha^* \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \beta^* \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

4) positiv definit: $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$ mit $= 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ wir def. Norm eines Vektors def mit $\underline{\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}}$
und $\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$

- Skalarprodukt in einer Basis $\underline{e}_i$: (nicht unbedingt Standard v. oben)

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle v_i \underline{e}_i, w_j \underline{e}_j \rangle = v_i^* w_j \underbrace{\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle}_{= (\underline{\underline{M}})_{ij}} \quad \text{Matrix,}$$

und es gilt M ist hermitesch

$$(\underline{\underline{M}}^+)_{ij} = (M^{*T})_{ij} = (\underline{\underline{M}}^*)_{ji} = \langle \underline{e}_j, \underline{e}_i \rangle^* = \langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = (\underline{\underline{M}})_{ij}$$

- Orthonormalbasis (ONB): $\underline{\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij}}$
(z.B. Standardbasis im $\mathbb{R}^n$)

$$\Rightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = v_i^* w_i, \quad \text{mit } \underline{v} = v_j \underline{e}_j \Rightarrow v_i = \langle \underline{e}_i, \underline{v} \rangle$$

- Ein VR V mit Skalarprodukt, der vollständig ist (∀ Folgen → Element ∈ V) heißt Hilbertraum
- Darstellung linearer Abb. L

$$\underline{v} \to L(\underline{v}) \underset{\uparrow}{=} L(v_k \underline{e}_k) = v_k L(\underline{e}_k) \in W.$$
$\underline{e}_k$ Basis von V

Sei $\{\underline{d}_i\}$ Basis von $W \Rightarrow L(\underline{e}_k) = L_{ik} \underline{d}_i$, L_{ik} Matrixdarst.

$$\Rightarrow L(\underline{v}) = \underline{d}_i L_{ik} v_k$$

(z.B. f. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\underline{e}_i = \underline{d}_i$ mögliche Wahl: $= \underline{e}_i L_{ik} v_k$

- Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahren:

Sei $\{\underline{f}_i\}$ Basis von V aber nicht ONB. Konstruiere ONB

rekursiv: $\underline{e}_1 := \frac{\underline{f}_1}{\|\underline{f}_1\|} \Rightarrow \|\underline{e}_1\| = 1$

$$\tilde{\underline{e}}_2 := \underline{f}_2 - \langle \underline{e}_1, \underline{f}_2 \rangle \underline{e}_1, \quad \underline{e}_2 := \frac{\tilde{\underline{e}}_2}{\|\tilde{\underline{e}}_2\|}$$ ist normiert $\|\underline{e}_2\| = 1$

und es gilt $\langle \underline{e}_1, \tilde{\underline{e}}_2 \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{f}_2 \rangle - \langle \underline{e}_1, \underline{f}_2 \rangle \underbrace{\|\underline{e}_1\|^2}_{=1} = 0$ d.h. $\tilde{\underline{e}}_2 \perp \underline{e}_1$