* Allgemeinerer Statistischer Operator von gemischten Zuständen

* Wir betrachten einen gemischten Zustand $|\chi\rangle$, der mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$ im reinen Zustand $|\psi_n\rangle$ ist, offensichtlich ist $\boxed{\sum_n p_n = 1.}$

Hierbei muss $\{|\psi_n\rangle\}$ keine Basis sein, aber $\forall_n \langle\psi_n|\psi_n\rangle = \delta_{nm}$.

Def. den zu $|\psi\rangle$ gehörigen stat. Op. durch $\boxed{\hat{S}_G = \sum_n |\psi_n\rangle p_n \langle\psi_n|}$

und Def. des Erwartungswert von $\hat{A}$ als

Gemisch

diagonal da $|\chi\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle$

$$\langle\hat{A}\rangle \equiv Sp[\hat{S}_G \hat{A}] = \sum_a \sum_n \langle a|\psi_n\rangle p_n \langle\psi_n|\hat{A}|a\rangle \quad , \{|a\rangle\} \text{ Basis}$$

$$= \sum_a \sum_n p_n \langle\psi_n|\hat{A}\underbrace{|a\rangle\langle a|}_{\text{Vollst.relation}}\psi_n\rangle = \sum_n p_n \langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle$$

("klass. Addition von Erwartungswerten")

* Wenn wir Eigenzustände $|a\rangle$ von $\hat{A}$ und damit eine Basis von V zur Konstruktion von $\hat{S}$ benutzen, d.h. p_a sind die Wahrscheinlichkeiten daß $|\chi\rangle$ im Zustand $|a\rangle$ ist, erhalten wir $\boxed{\hat{S}_G = \sum_a |a\rangle p_a \langle a|}$. Für dieses $\hat{S}$ gilt dann

$$p_{a'} \overset{!}{\underset{S.63}{=}} Sp[\hat{S}_G \hat{S}_{a'}] = Sp[\hat{S}_G |a'\rangle\langle a'|] = \sum_{a,a''} \langle a''|a\rangle p_a \langle a|a'\rangle \underbrace{\langle a'|a''\rangle}_{\delta_{a'a''}}$$

$$= \sum_a p_a \underbrace{\langle a'|a\rangle}_{\delta_{a,a'}} \underbrace{\langle a|a'\rangle}_{\delta_{a,a'}} = p_{a'} \text{, d.h. diese Def. ist konsistent.}$$

Eigenschaften dieses allgem. stat. Operators:

1) $\hat{S}_G^\dagger = \hat{S}_G$: $\quad \langle\chi|\hat{S}_G^\dagger|\phi\rangle = \langle\hat{S}_G\chi|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{S}_G|\chi\rangle^* = \left(\langle\phi|\sum_n|\psi_n\rangle p_n\langle\psi_n|\chi\rangle\right)^*$

$$= \sum_n \langle\chi|\psi_n\rangle \underset{p_n}{\overset{\shortparallel}{p_n^*}} \langle\psi_n|\phi\rangle = \langle\chi|\hat{S}_G|\phi\rangle$$

2) $Sp[\hat{\varrho}_G] = 1$:

$$Sp[\hat{\varrho}_G] = \sum_a \sum_n \langle a|\Psi_n\rangle p_n \langle \Psi_n|a\rangle$$
$$= \sum_n \sum_a \langle \Psi_n|a\rangle\langle a|\Psi_n\rangle p_n$$
$$\overset{\text{Vollst.}}{=} \sum_n \underline{\langle \Psi_n|\Psi_n\rangle} p_n = \sum_n p_n = 1$$

3) Aber: es gilt i. A. $\hat{\varrho}_G^2 \neq \hat{\varrho}_G$, denn

$$\hat{\varrho}_G^2 = \sum_{n,m} |\Psi_n\rangle p_n \underbrace{\langle \Psi_n|\Psi_m\rangle}_{\delta_{n,m}} p_m \langle \Psi_m| = \sum_n |\Psi_n\rangle p_n^2 \langle \Psi_n|$$

$$\Rightarrow Sp[\hat{\varrho}_G^2] = \sum_a \sum_n \langle a|\Psi_n\rangle p_n^2 \langle \Psi_n|a\rangle = \sum_n \sum_a \langle \Psi_n|a\rangle\langle a|\Psi_n\rangle p_n^2$$
$$\overset{\text{Vollst.}}{=} \sum_n \underbrace{\langle \Psi_n|\Psi_n\rangle}_{1} p_n^2 = \sum_n p_n^2 \leq \sum_n p_n = 1$$

$\Rightarrow$

$Sp[\hat{\varrho}_G^2] = 1$ genau dann wenn $p_n = \delta_{n,n_0}$, d.h. $|\chi\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1 im reinen Zustand $|\Psi_{n_0}\rangle$ ist

$Sp[\hat{\varrho}_G^2] < 1$ impliziert, daß $|\chi\rangle$ in einem gemischten Zustand ist!

Bewegungsgleichung des stat. Operators:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\varrho}_G = i\hbar \frac{d}{dt}\sum_n |\Psi_n\rangle p_n \langle \Psi_n| = \sum_n \hat{H}|\Psi_n\rangle p_n \langle \Psi_n| - \sum_n |\Psi_n\rangle p_n \langle \Psi_n|\hat{H}$$
$$= \hat{H}\hat{\varrho}_G - \hat{\varrho}_G\hat{H}$$
$$= [\hat{H}, \hat{\varrho}_G] \quad \text{„von-Neumann-Gleichung"}$$

$\Rightarrow$ im Schrödinger-Bild erhalten wir für $\hat{A}$ t-unabhängig

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle \hat{A}\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} Sp[\hat{\varrho}_G \hat{A}] = Sp[[\hat{H}, \hat{\varrho}_G]\hat{A}] = Sp[\hat{H}\hat{\varrho}_G\hat{A} - \hat{\varrho}_G\hat{H}\hat{A}]$$
$$= Sp[\hat{\varrho}_G\hat{A}\hat{H} - \hat{\varrho}\hat{H}\hat{A}] = Sp[\hat{\varrho}_G[\hat{A}, \hat{H}]] = \langle [\hat{A}, \hat{H}]\rangle$$

d.h. auf die gemischten Zustände erfüllen eine Bewegungsgleichung wie im Ehrenfestschen Theorem für reine Zustände $|\psi(t)\rangle$.
Hier haben wir benutzt, daß die Spur zyklisch ist, s. S. 63.

* Was unterscheidet einen gemischten Zustand von einem gewöhnlich QM Zustand?

Gegeben sei ein reiner, qm. Zustand $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$, $|c_n|^2 = |\langle\psi_n|\psi\rangle|^2$
entwickelt in ONB mit Wahrscheinlichkeit $|c_n|^2$ daß im Zustand $|\psi_n\rangle$
und $\sum_n |c_n|^2 = 1$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{n,n'} \langle\psi_{n'}|c_{n'}^* \hat{A} c_n|\psi_n\rangle$$

$$= \underbrace{\sum_n |c_n|^2 \langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle}_{\text{Diagonalbeitrag}} + \underbrace{\sum_{n\neq n'} c_{n'}^* c_n \langle\psi_{n'}|\hat{A}|\psi_n\rangle}_{\text{Interferenzterme}}$$

(dies könnten wir auch als $= Sp[\hat{S}_\psi \hat{A}]$ schreiben mit
$\hat{S}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{n,n'} c_n|\psi_n\rangle\langle\psi_{n'}|c_{n'}^*$)

Im Unterschied dazu gilt für einen gemischten Zustand
mit Stat. Op $\hat{S}_G = \sum_n |\psi_n\rangle p_n \langle\psi_n|$ daß

$$\langle \hat{A} \rangle = Sp[\hat{S}_G \hat{A}] = \sum_n p_n \langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle$$

d.h. es gibt nur den Diagonalbeitrag!

Wie wir bereits gesehen haben (Spaltexperiment S 13 A) sind Interferenzen charakteristisch f. QM. Verhalten.

Das Verlorengehen von Interferenz heißt Dekohärenz und kann wie folgt vorgestellt werden: $c_m^* c_n = r_n e^{i\varphi_n}$, nach Mittelung über die Phasen φ_n, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_n\, e^{i\varphi_n} = 0$ bleibt nur der Diagonalterm übrig, wie bei einem gemischten Zustand mit $p_n = |c_n|^2$. (s. Ü8)

Wir haben aber auch gesehen, daß der verbleibende gemischte Zustand sich weiterhin qm zeit-entwickelt: v. Neumann Gl., Ehrenfestsches Theorem wie zuvor!

3.5. Der Meßprozeß [Münster 22., Fließbach I.8, V.16]

Dies ist einer der heikelsten Punkte in der QM, zu dem es auch heute noch Diskussionen gibt. Wir fügen folgendes, einfach scheinende Postulat der QM V hinzu:

V Wird an einem qm System im Zustand $|\psi\rangle$ die Observable $\hat{A}$ gemessen, und finden wir als Meßwert a, so befindet sich das System nach der Messung im dazugehörigen Eigenzustand $|a\rangle$ von $\hat{A}$. Dies heißt Zustandsreduktion.

Probleme:
- Der Meßapparat (Beobachter) beeinflußt das System (das ist nicht was wir bei Messungen in klass. Physik wollen) – aber, der Meßapparat ist u.U. kein QM-Objekt, das Schrödinger gehorcht
- es gibt 2 Arten von Zeitentwicklung: unitär = Schrödinger, und nicht unitär f. den Meßprozeß.

Schematische Darstellung des Meßprozesses

	vorher	nach Messung vor Ablesung	nach Ablesung
Zustand	$\vert\psi\rangle = \sum_n c_n \vert\psi_n\rangle$	gemischt	$\vert\psi_n\rangle$ rein
stat. Op	$\hat{S}_\psi = \vert\psi\rangle\langle\psi\vert = \sum_n \vert c_n\vert^2 \vert\psi_n\rangle\langle\psi_n\vert + \sum_{n\neq n'} c_{n'}^* c_n \vert\psi_n\rangle\langle\psi_{n'}\vert$	$\underline{\hat{S}_I} = \sum_n \vert c_n\vert^2 \vert\psi_n\rangle\langle\psi_n\vert$	$\underline{\hat{S}_{II}} = \vert\psi_n\rangle\langle\psi_n\vert$
	Diag. + Interferenz	nur diag	Eigenzustand

Zustandsreduktion

Kenntnisnahme (wie in klass. Physik)

Postulat $\underline{V}$

1. Schritt: Dekohärenz, WW mit klass. Meßinstrument. Danach liegt der reduzierte (weil wegen Info) gemischte Zustand mit geg. Wahrscheinlichkeiten $|c_n|^2$ in Eigenzuständen $|\psi_n\rangle$ mit Meßwert n vor. Wir wissen aber nicht in welchem.

2. Schritt: Nach dem Ablesen von n wissen wir, daß der Zustand $|\psi_n\rangle$ vorliegt.

Es gilt:

- die unitäre Zeitentwicklung von reinen q.m. Zuständen (nach Schrödi) bildet diese auf reine q.m. Zustände ab

Start reiner Zustand zu t_0: $Sp[\hat{S}_{\psi(t_0)}^2] = Sp[\hat{S}_{\psi(t_0)}]$, dann zeitentw.

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \Rightarrow \hat{S}_{\psi(t)} = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|\hat{U}^\dagger(t,t_0)$$

$$\Rightarrow Sp[\hat{S}_{\psi(t)}] = Sp[\hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|\underbrace{\hat{U}^\dagger(t,t_0)]}_{\text{gibt } 1} = Sp[\hat{S}_{\psi(t_0)}]$$