4) positiv definit: $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$ mit $= 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ wir def. Norm eines Vektors def mit $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$
und $\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$

- Skalarprodukt in einer Basis $\underline{e}_i$: (nicht unbedingt Standard v. oben)

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle v_i \underline{e}_i, w_j \underline{e}_j \rangle = v_i^* w_j \underbrace{\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle}_{=(\underline{M})_{ij}} \quad \text{Matrix,}$$

und es gilt M ist hermitesch,

$$(\underline{M}^+)_{ij} = (\underline{M}^{*T})_{ij} = (\underline{M}^*)_{ji} = \langle \underline{e}_j, \underline{e}_i \rangle^* = \langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = (\underline{M})_{ij}$$

- Orthonormalbasis (ONB): $\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij}$
(z.B. Standardbasis in $\mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = v_i^* w_i$, mit $\underline{v} = v_j \underline{e}_j \Rightarrow v_i = \langle \underline{e}_i, \underline{v} \rangle$

- Ein VR V mit Skalarprodukt, der vollständig ist (∀ Folgen → Element ∈ V) heißt Hilbertraum
- Darstellung linearer Abb. L

$$\underline{v} \to L(\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{e}_k \text{ Basis von } V}}{=} L(v_k \underline{e}_k) = v_k L(\underline{e}_k) \in W.$$

Sei $\{\underline{d}_i\}$ Basis von $W \Rightarrow L(\underline{e}_k) = L_{ik} \underline{d}_i$, L_{ik} Matrixdarst.

$$\Rightarrow L(\underline{v}) = \underline{d}_i L_{ik} v_k$$

(z.B. f. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\underline{e}_i = \underline{d}_i$ mögliche Wahl: $= \underline{e}_i L_{ik} v_k$

- Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahren:

Sei $\{\underline{f}_i\}$ Basis von V aber nicht ONB. Konstruiere ONB

rekursiv: $\underline{e}_1 := \frac{\underline{f}_1}{\|\underline{f}_1\|} \Rightarrow \|\underline{e}_1\| = 1$ (weil bas. $\underline{f}_i \neq \underline{0}$ ∀i)

$\tilde{\underline{e}}_2 = \underline{f}_2 - \langle \underline{e}_1, \underline{f}_2 \rangle \underline{e}_1$, $\underline{e}_2 = \frac{\tilde{\underline{e}}_2}{\|\tilde{\underline{e}}_2\|}$ ist normiert $\|\underline{e}_2\| = 1$

und es gilt $\langle \underline{e}_1, \tilde{\underline{e}}_2 \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{f}_2 \rangle - \langle \underline{e}_1, \underline{f}_2 \rangle \underbrace{\|\underline{e}_1\|^2}_{=1} = 0$ d.h. $\tilde{\underline{e}}_2 \perp \underline{e}_1$

usw., d.h. für bel $k \geq 2$: $\tilde{e}_k := f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, f_k \rangle e_i$, $e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}$

und es gilt $\forall j < k$: $\langle e_j, \tilde{e}_k \rangle = \langle e_j, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{\delta_{ij}} \langle e_i, f_k \rangle$

δ_{ij} dafür $j<k$ bereits ONB

- <u>dualer VR</u> zu jedem VR V über K gibt einen
  — " — V^* der linearen Abb. : $V \to K$ (V endl. dim $\Rightarrow \dim V = \dim V^*$)

- Wenn V ein Skalarprodukt besitzt gibt es einen Isomorphismus $V \leftrightarrow V^*$ (d.h. eine eindeutige lineare Abb.):

$$\forall \underline{v} \in V \ \exists \ \underline{v}^* \in V^* , \quad \underline{v}^* \begin{cases} V \to K \\ \underline{u} \to \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle \end{cases}$$

- <u>Vollständigkeitsrelation</u> in Dirac-Notation

wir haben gesehen: $\underline{v} = e_j \langle e_j, \underline{v} \rangle \in V$

wir identifizieren $\underline{v} = |v\rangle \in V$ und $\underline{v}^* = \langle v| \in V^*$

d.h. Skalarprodukt $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle v | w \rangle$
bra, ket-Vektor

und
$$\boxed{|v\rangle = \underbrace{|e_j\rangle\langle e_j|}_{\hat{=}\ \mathbb{1}} v\rangle}$$
für $\{e_j\}$ ONB

Vollständigkeitsrelation (mit Summe $\mathbb{1} = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|$) für $\dim V = n$

$\Rightarrow$ für <u>lineare Abb $L : V \to V$</u>

Vector $\in V$ Skalar $\in K$

$L(\underline{v}) = L|v\rangle = L|e_k\rangle\langle e_k|v\rangle$ $\quad$ L ist Operator der nach rechts wirkt

$\mathbb{1}$

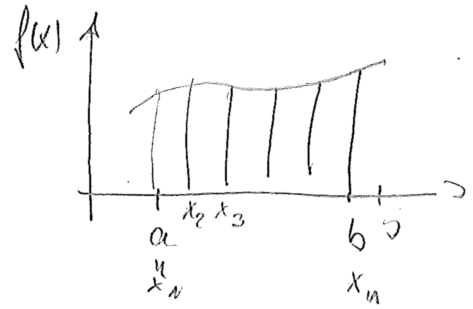
einfügen der $\mathbb{1} = |e_\ell\rangle\langle e_\ell|$

$$= |e_\ell\rangle \underbrace{\langle e_\ell | L | e_k \rangle}_{L_{\ell k}} \underbrace{\langle e_k | v \rangle}_{v_k}$$

II.2. Beispiele für endlich und unendlich dimensionale VR

- betrachte Fkt $f: \begin{cases} x \to f(x) \\ \mathbb{R} \to K \end{cases}$ (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$), eingeschränkt auf endlichen Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$: (z.B. alle stetige Fktn auf $[a,b]$)

$K = \mathbb{R}$:



diskretisiere $[a,b]$ in n Punkte $x_1, \dots, x_n$ und betrachte Spaltenvektor (n-dim)

$$\underline{f}(x) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$ Komponenten $f_i = f(x_i)$

- für festes n bilden diese Funktionen einen n-dim VR über K,

da $(\underline{f} + \underline{g})(x) = \underline{f}(x) + \underline{g}(x)$ eine abelsche Gruppe bilden

addiere nur die El. des Spaltenvektors

und mit Multiplikation von $\lambda \in K$ eine assoziative Mult. definiert ist $(\lambda \underline{f})(x) = \lambda \underline{f}(x) = \begin{pmatrix} \lambda f(x_1) \\ \vdots \\ \lambda f(x_n) \end{pmatrix}$

- Mit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \dots, n-1$ ist

$$\langle \underline{f}, \underline{g} \rangle_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f^*(x_i) \, g(x_i)$$ ein Skalarprodukt.

- Limes $n \to \infty$ zum ∞-dim VR

Falls der Limes $\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f^*(x_i) g(x_i) = \int_a^b dx \, f^*(x) g(x)$ existiert

so ist dies ebenfalls ein Skalarprodukt $= \langle f, g \rangle$,

mit Norm $0 \le \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b dx \, |f(x)|^2 < \infty$

- Erweitert auf alle auf $[a,b]$ quadrat integrablen Fkt. ist dies der VR $L^2([a,b])$

Beispiel i) betrachte alle reellen Polynome vom Grad N. $P_\ell(x), \ell = 0,\dots,N$

Diese sind abelsch bzgl. Addition und assoziativ bzgl. Multiplikation mit $1 \in K = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ sie bilden einen $(N+1)$-dim VR über $\mathbb{R}$ (Ü 10.2)

• Basis: alle diese Polynome werden durch die Monome

$\{p_0(x) = 1, \; p_1(x) = x, \; \dots, \; p_N(x) = x^N\}$ aufgespannt und diese

bilden eine Basis, mit dimension $N+1$, $\underline{e}_i = p_i(x)$

$\rightarrow$ definiere ein Skalarprodukt auf diesem VR durch

z.B. $\langle P_\ell, Q_k \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dx \, P_\ell(x) \, Q_k(x)$ ($\exists$ andere Möglichkeiten)

und diesbezüglich können wir mittels Gram-Schmidt eine ONB konstruieren (Ergebnis hier: Legendre Polynome)

* auch hier können wir den limes $N \to \infty$ und so den VR aller Polynome auf $[-1, 1]$ betrachten.

Bspiel ii) $\varphi_n(x) = e^{inx}$ auf $x \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{Z}$

mit abelscher Addition $\varphi_n + \varphi_m = e^{i(n+m)x}$

und Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx \, f^*(x) \, g(x)$ (Ü 10.1)

(iii) $f_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{R}$)

Frage: wie läßt sich der Kontinuums limes der

Vollständigkeitsrelation $\sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle\langle e_k| = \mathbb{1}$

bzw. C . $D_{ij} = \delta_{ij}$ Matrixelemente

mit $n \to \infty$ realisieren?