

Schematische Darstellung des Meßprozesses

	vorher	nach Messung vor Ablesung	nach Ablesung
Zustand	$ \psi\rangle = \sum_n c_n \psi_n\rangle$	gemischt	$ \psi_n\rangle$ rein
stab. Op	$\hat{S}_\psi = \psi\rangle\langle\psi $ $= \sum_n c_n ^2 \psi_n\rangle\langle\psi_n $ $+ \sum_{n \neq m} c_n^* c_m \psi_n\rangle\langle\psi_m $	$\hat{S} = \sum_n c_n ^2 \psi_n\rangle\langle\psi_n $ <p style="text-align: center;">nur diagonal</p>	$\hat{S}_n = \psi_n\rangle\langle\psi_n $ <p style="text-align: center;">Eigenzustand</p>
	Kohärenz + Interferenz		
	↘ Zustandsreduktion		↘ Klassifizierung (wie in klass. Physik)
	↘ Postulat V		

1. Schritt: Dekohärenz, wie mit klass. Meßinstrument. Danach liegt der ^{gemischte} reduzierte (weil weniger Info) Zustand mit geg. Wahrscheinlichkeiten $|c_n|^2$ in Eigenzuständen $|\psi_n\rangle$ mit Meßwert n vor. Wir wissen aber nicht in welchem.

2. Schritt: Nach dem Ablesen von n wissen wir, dass der Zustand $|\psi_n\rangle$ vorliegt.

Es gilt:

• die unitäre Zustandsentwicklung von reinen q.m. Zuständen (nach Schröd.) bildet diese auf reine q.m. Zustände ab

Startreiner Zustand $\rho_0 = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \Rightarrow \text{Sp}[\hat{S}_{\psi_0}] = \text{Sp}[\hat{S}_{\psi_0}]$, Name z. i. b. l. r.

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \Rightarrow \hat{S}_{\psi(t)} = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}[\hat{S}_{\psi(t)}] = \text{Sp}[\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0)] = \text{Sp}[\hat{S}_{\psi(t_0)}]$$

B. 11.1

$$\Rightarrow \hat{S}_{\Psi(t_0)}^{A^2} = \hat{U}(b, t_0) |\Psi(b_0)\rangle \langle \Psi(b_0)| \underbrace{\hat{U}(a, t_0) \hat{U}(a, t_0)^\dagger}_{=1} |\Psi(b_0)\rangle \langle \Psi(b_0)| \hat{U}(a, t_0)^\dagger$$

$$\Rightarrow \text{Sp}[\hat{S}_{\Psi(t_0)}^{A^2}] = \text{Sp}[\underbrace{\hat{U}(b, t_0) |\Psi(b_0)\rangle \langle \Psi(b_0)|}_{\text{zyklisch, erg. bb 1}} \underbrace{\langle \Psi(b_0)| \Psi(b_0)\rangle}_{=1} \langle \Psi(b_0)| \hat{U}(a, t_0)^\dagger] \\ = \text{Sp}[\hat{S}_{\Psi(b_0)}^{A^2}] = \text{Sp}[\hat{S}_{\Psi(b_0)}] = \text{Sp}[\hat{S}_{\Psi(b_0)}^1] \quad \text{d.h. ein reiner Zustand erg. von } (=1)$$

• Die unitäre Zeitentwicklung von gemischten Zuständen bildet diese auf gemischte Zustände ab:

○ Gemischter Zustand zu t_0 : $\hat{\rho}(t_0) = \sum_n |\Psi_n\rangle p_n \langle \Psi_n|$, hier gilt $\text{Sp}[\hat{\rho}(t_0)] = \text{Sp}[\hat{S}_{\rho(t_0)}^{A^2}] = 1$

$$\Rightarrow \text{zu } t > t_0 \quad \hat{\rho}(t) = \sum_n \hat{U}(b, t_0) |\Psi_n\rangle p_n \langle \Psi_n| \hat{U}(b, t_0)^\dagger \\ = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}[\hat{\rho}(t)] = \text{Sp}[\underbrace{\hat{U}(b, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(b, t_0)}_{\text{ergibt 1}} \underbrace{\hat{U}(a, t_0) \hat{U}(a, t_0)^\dagger}_{=1} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(a, t_0)] \\ = \text{Sp}[\hat{\rho}(t_0)] = 1 \quad \text{wobei Voraussetzung.}$$

○ \Rightarrow der Schritt von $\hat{S}_\Psi \rightarrow \hat{S}_T$ ist nicht-unitär! (+ Siderück)

[Bildliche Ungleichung, Vollwertmessung, verbergene Parameter \rightarrow Lit. o.B. Künster 22]

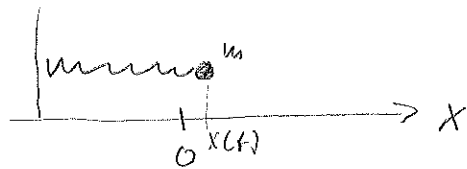
Beispiel: wir schießen einen Elektronenstrahl durch einen Doppelspalt und beobachten Interferenz, s.S. 131. (memorisierte Lösung)

Nun möchten wir wissen, ob ein Elektron durch den oberen oder unteren Spalt fliegt. Dazu müssen wir den Spalt mit Licht bestrahlen, dessen Wellenlänge $<$ Spalt, wegen der Auflösung. Diese kurzwellige Strahlung zerstört das Interferenzmuster, sobald wir genügend Photonen einstrahlen, um das Elektron oben oder unten zu lokalisieren.

4. Der harmonische Oszillator [Muster S.1, S.2, Fließband ()]

Dies ist eines der wichtigsten Beispiele von qm Systemen, die wir exakt lösen können. Es hat zudem viele Anwendungen! Wir wenden an diesem Beispiel unsern Formalismus wieder abt im Hilbertraum an.

Klassische Mechanik:



Hooke'sches Gesetz: die Kraft F

ist linear und proportional zur Auslenkung: $F = -kx$

\Rightarrow Bewegungsgleichung $m \ddot{x}(t) = -k x(t)$, $k = m\omega^2$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

mit Lösung $x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} p(0) \sin \omega t$

zu Anfangsbedingungen $x(t=0) = x(0)$, $\dot{x}(t=0) = \frac{p(0)}{m}$

oder im Hamilton formalismus mit

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

kin. Energie T pot. Energie U

$$\dot{p}(t) = \{p, H\} = -m\omega^2 x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \{x, H\} = \frac{p(t)}{m}$$

Anwendung des Vorwertsatzes: im zeitlichen Mittel $\bar{\quad}$ gilt

für T und V : $\bar{T} = \bar{V} = \frac{1}{2} E$ wobei E die Gesamtenergie ist

* der harmonische Oszillator kann oft auch als gute Näherung verwendet werden, wenn die Bewegung eines Teilchens um das Minimum x_0 eines allgemeinen Potentials $U(x)$ betrachtet wird:

Taylorentwicklung um x_0 : $U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} (x-x_0)^2 \underbrace{U''(x_0)}_{=k} + O((x-x_0)^3)$

QM: Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

wir definieren $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \hat{p}$ (Absteigeoperator (Vernichtungs ~))
 und sein konjugiertes $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \hat{p}$ (Aufsteigeoperator (Erzeugung ~))

(Namen werden später klar)

* da Orts- und Impulsoperator reelle Eigenwerte haben (eben Ort und Impuls) stellen wir diese durch hermitesche Operatoren

dar: $\hat{x} = \hat{x}^\dagger$, $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$, damit ist auch automatisch $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$

(und dessen Eigenwerte = Energien reell).

→ Weder \hat{a} noch \hat{a}^\dagger sind hermitesch, also sind diese selbst keine Observablen. Trotzdem sind sie sehr nützlich, wie wir gleich sehen werden.

aus obiger Def folg $\hat{x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$

$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{i}$

* Vertauschungsrelationen von \hat{a} und \hat{a}^\dagger :

$[\hat{a}, \hat{a}] = 0 = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]$ (trivial)

$\Rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \hat{p} \right), \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \hat{p} \right) \right]$

$= \frac{-i}{2\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] + \frac{i}{2\hbar} [\hat{p}, \hat{x}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}$

Hamilton-Op in \hat{a} und \hat{a}^\dagger :

$\hat{H} = \frac{1}{2m} \frac{\hbar m\omega}{2} (-1) (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega \frac{2}{2m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \frac{\hbar\omega}{4} (\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^2)$
 $= \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + 1)$

Wir definieren nun noch $\hat{N} = \begin{matrix} 1+1 \\ a^\dagger a \end{matrix}$, den Anzahloperator $\hat{N} = \hat{N}$ Ü 8.2.5

$\Rightarrow \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right)$ offensichtlich sind Eigenzustände von \hat{N} auch Eigenzustände von \hat{H} und umgekehrt.

* Vertauschungsrelationen von \hat{N} mit \hat{a} und \hat{a}^\dagger :

- benutze daß $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \pm \hat{A}\hat{C}\hat{B}$
 $= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

$\Rightarrow [\hat{N}, \hat{a}] = \begin{matrix} 1+1 & 1 \\ a^\dagger a & a \end{matrix} = \hat{a} \begin{matrix} 1 & 1 \\ a & a \end{matrix} + \begin{matrix} 1+1 & 1 \\ a^\dagger & a \end{matrix} \hat{a} = \begin{matrix} 1 \\ -a \end{matrix} = \hat{N}\hat{a} - \hat{a}\hat{N}$

$\bullet [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \begin{matrix} 1 & 1+1 \\ a^\dagger & a^\dagger \end{matrix} = \hat{a}^\dagger \begin{matrix} 1 & 1+1 \\ a & a \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1+1 \\ a^\dagger & a^\dagger \end{matrix} \hat{a} = \begin{matrix} 1+1 \\ +a \end{matrix} = \hat{N}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{N}$

\Rightarrow anhand all dieser Vertauschungsrelationen können wir nun alle Eigenwerte und Eigenzustände von \hat{H} des harmon. Osz. bestimmen:

Seien $|\lambda\rangle$ die Eigenzustände von \hat{N} (und \hat{H}): $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$
 mit $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$. Dann gilt: limites $\lambda \in \mathbb{R}$, s.o.

i) $\langle\lambda|\hat{N}|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda\rangle = \langle\hat{a}\lambda|\hat{a}\lambda\rangle = \|\hat{a}\lambda\|^2 \geq 0$
 $= \langle\lambda|\lambda\rangle = 1 \langle\lambda|\lambda\rangle = 1$ Norm² des Zustandes $\hat{a}|\lambda\rangle \in$ Hilbertraum V
 $\Rightarrow \boxed{\lambda \geq 0} \quad \forall$ Eigenzustände von \hat{N}

ii) $\hat{N}\hat{a}|\lambda\rangle = (\hat{a}\hat{N} + [\hat{N}, \hat{a}])|\lambda\rangle = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|\lambda\rangle = \hat{a}(\lambda - 1)|\lambda\rangle = \hat{a}(\lambda - 1)|\lambda\rangle$
 $= (\lambda - 1)\hat{a}|\lambda\rangle$

\Rightarrow Wenn $|\lambda\rangle$ Eigenzustand mit Eigenwert λ ist
 $\hat{a}|\lambda\rangle \rightarrow \dots \rightarrow (\lambda - 1)$. D.h. \hat{a} erzeugt Zustand mit um λ absteigender Energie = Absteigeoperator.

$$\text{iii) } \hat{N} \hat{a}^\dagger | \lambda \rangle = (\hat{a}^\dagger \hat{N} + [\hat{N}, \hat{a}^\dagger]) | \lambda \rangle = (\hat{a}^\dagger \hat{N} + \hat{a}^\dagger) | \lambda \rangle = \hat{a}^\dagger (\hat{N} + 1) | \lambda \rangle \\ = (\lambda + 1) \hat{a}^\dagger | \lambda \rangle$$

d.h. $\hat{a}^\dagger | \lambda \rangle$ ist Eigenzustand mit Eigenwert $\lambda + 1$, d.h. \hat{a}^\dagger erzeugt Zustand mit um $+1$ aufsteigender Energie = Aufsteigeoperator.

Insbesondere haben durch wiederholte Anwendung (und Durchtanschen von \hat{N}) die Zustände $(\hat{a}^\dagger)^n | \lambda \rangle$ den Eigenwert $\lambda + n$
 $(\hat{a}^\dagger)^n | \lambda \rangle$ " " " " $\lambda + n$

Wegen 1) gilt, daß alle Eigenwerte nicht negativ sind, d.h. es muß

gelden daß $\lambda \in \{0, 1, 2, \dots\}$ in Eigenzuständen $| \lambda \rangle$
 und $\hat{a} | 0 \rangle = 0$ (da sonst ein Zustand mit neg. Eigenwert erzeugt würde!)

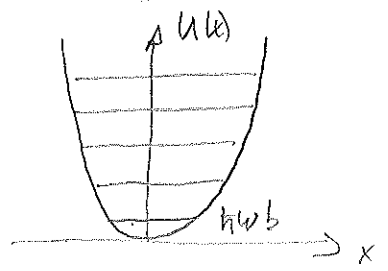
Der Zustand $| 0 \rangle$ heißt Grundzustand (und wird von \hat{a} vernichtet).

Von nun an nennen wir $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\hat{N} | n \rangle = n | n \rangle, \quad \hat{H} | n \rangle = \hbar \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) | n \rangle = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) | n \rangle$$

d.h. die erlaubten Energien lauten $\hbar \omega \frac{1}{2}, \hbar \omega \frac{3}{2}, \dots$

und sind äquidistant: $E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{N}$



* in der klassischen Mechanik wäre im Grundzustand die Energie null, mit $x(t) = 0 = p(t)$. Aufgrund der Unschärferelation ist dies in der QM aber nicht möglich, siehe

Ü 9.1 wo die entsprechenden Erwartungswerte berechnet werden.

Die höheren angeregten Energiezustände $| n \rangle$ können wir mittels Anwendung von \hat{a}^\dagger erzeugen: $| n \rangle = C_n (\hat{a}^\dagger)^n | 0 \rangle.$