II.3. Dirac δ-Distribution [Arfken 1.15]

• Wir haben gesehen f. endlich dimensionalen Vektorraum

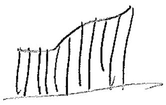
$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \text{ f. ONB bzw } \left(|e_n\rangle\langle e_n| \right)_{ij} = \delta_{ij}$$

aus Vollständigkeitsrelation

• Frage: wie können wir hier einen Kontinuums limes $i \to x$, $j \to y$ bilden, d.h. $\delta_{ij} \to \delta(x-y) = ?$

<u>1. Versuch</u>: def $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \text{"}\infty\text{"} & \text{für } x = 0 \end{cases}$

<u>aber</u>: ein solches $\delta(x)$ ist nicht integrierbar im Riemannschen Sinne oder integriert zu 0 im Lebesgue-Integral da $\delta(x) \neq 0$ nur auf 1 Punkt = Menge vom Maß null.



<u>2. Versuch</u>: betrachte den Limes von δ_{ij} nur unter Integralen, bzw. integriert mit <u>Testfunktionen $\psi(x)$</u> die hinreichend glatt, oft stetig diffbar und integrierbar sind (d.h. im Unendlichen schnell genug abfallen)

$\Rightarrow$ Wir betrachten $\delta(x)$ als <u>verallgemeinerte Funktion</u> (Distribution)

<u>Def</u> δ-"Funktion" (Distribution) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta(x) = \psi(0)$

für alle erlaubten Testfunktionen und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$ (Verallgem. von δ_{ij})

* wir nehmen an, daß wir mit $\delta(x)$ wie mit anderen Fkt. rechnen können, d.h. wir dürfen z.B. substituieren u. partiell integrieren

$\Rightarrow$ <u>Eigenschaften von $\delta(x)$</u>:

• $$\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta(x-x_0)} \underset{y = x - x_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi(y+x_0)\, \delta(y) = \psi(0+x_0) = \underline{\psi(x_0)} \quad (1)$$

• $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta(-x) \underset{y=-x}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} dy\, \psi(-y)\, \delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi(-y)\, \delta(y) = \underline{\psi(0)}$$

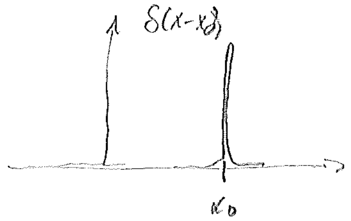
d.h. $\delta(x)$ ist eine grade "Funktion".

• $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta\left(\frac{x}{c}\right) \underset{y=\frac{x}{c}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} c\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi(cy)\, \delta(y) & \text{für } c>0 \\ c\int_{+\infty}^{-\infty} dy\, \psi(cy)\, \delta(y) & \text{für } c=-|c|<0 \end{array} \right\} = |c|\, \psi(0)$$

$c \neq 0$

oder allgemeiner $$\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta\left(\frac{x-x_0}{c}\right) = |c|\, \psi(x_0)} \qquad (2)$$

graphisch:



so daß (1) gilt.

d.h. δ ergibt die integrierte Testfunktion an der Stelle wo das Argument von $\delta(x-x_0)$ verschwindet, hier x_0, mit Vorfaktor (s. (2))

• Was ist $\delta(f(x))$?

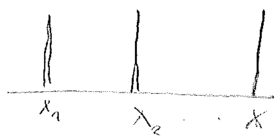
betrachte $f(x)$ mit einfacher ($\neq 0$) Nullstelle bei x_0, und f um x_0 Taylor entwickeln

$$\Rightarrow f(x) = \underset{0}{f(x_0)} + f'(x_0)(x-x_0) + O(x-x_0)^2$$

da δ stark konzentriert klein

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta\big(\underset{= \frac{1}{c}}{f'(x_0)}(x-x_0) + O(x-x_0)^2\big) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\, \psi(x_0)$$

• falls $f(x)$ mehrere einfache Nullstellen x_i hat wiederholen wir dies an jeder Nullstelle, alle tragen zum $\int_{-\infty}^{\infty}$ bei:



$$\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \delta(f(x))} = \underline{\sum_{j \text{ Nullstellen von } f(x)} \frac{1}{|f'(x_j)|}\, \psi(x_j)} \qquad (3)$$

• wegen der starken Konzentration von $\delta(x)$ können wir für geeignete Testfunktion $\psi(x)$ auch ohne Integral schreiben

$$\psi(x)\,\delta(x-x_0) = \psi(x_0)\,\delta(x-x_0)$$, da nach definierender Eigenschaft $\int\delta = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\,\delta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x_0)\,\delta(x-x_0) = \psi(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-x_0) = \psi(x_0)$$

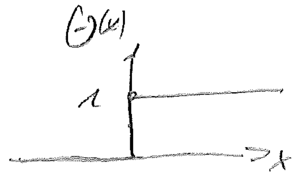
• „Ableitung" von δ: $\delta'(x)$: (genauso für andere Distributionen, s.u.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\,\delta'(x-x_0) = \underbrace{\psi(x)}_{\to 0}\underbrace{\delta(x-x_0)}_{\to 0 \text{ bei } \pm\infty}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi'(x)\,\delta(x-x_0) = (-1)\,\psi'(x_0)$$

bzw für $n \in \mathbb{N}$ $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\,\delta^{(n)}(x-x_0) = (-1)^n\,\psi^{(n)}(x_0)$$ n-fache Ableitung.

• „Stammfunktion" von $\delta(x)$

Heavisidesche Stufenfunktion $$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$



(welchen Wert $\Theta(0)$ annimmt ist unwichtig, symmetrischer Wert: $\Theta(0) = \frac{1}{2}$)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\,\Theta(x) = \int_{0}^{\infty} dx\, \psi(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\,\Theta'(x) \underset{\text{part. Integration}}{=} \underbrace{\psi(x)}_{\to 0}\Theta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi'(x)\,\Theta(x) = -\int_{0}^{\infty} dx\, \psi'(x)$$

$$= -\psi(x)\Big|_{0}^{\infty} = -\underbrace{\psi(\infty)}_{\to 0} + \psi(0)$$

dasselbe Ergebnis wie $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\,\delta(x) = \psi(0)$,

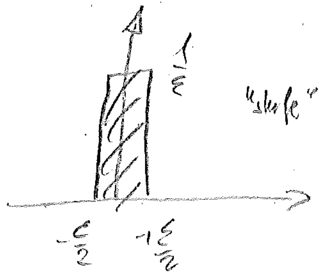
d.h. $\Theta'(x) = \delta(x)$

Explizite Darstellungen der δ-Funktion

- für Anwendungen ist es oft hilfreich, eine approximative Darstellung $f_\varepsilon(x)$ von $\delta(x)$ zu verwenden, die erst im Limes $\varepsilon \to 0$ $\delta(x)$ ergeben. (dies hilft auch für die Anschauung)

1. Klasse von Beispielen:

$f_\varepsilon(x)$ integrierbar f. $\varepsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_\varepsilon(x) = 1$ und auf einem (kleinen) Intervall lokalisiert: $f_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall |x| > \varepsilon$



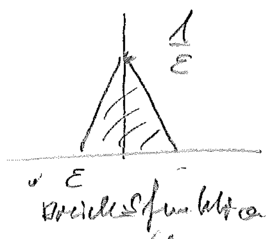
Bsp: $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } |x| \le \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

denn $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_\varepsilon(x) = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} dx \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} x \Big|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = 1$

und $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_\varepsilon(x)\, \psi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} dx\, \frac{1}{\varepsilon} \psi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon\, \psi(0) = \psi(0)$

etc

Bsp $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} & |x| \le \varepsilon \to \text{Ü } 10.3.3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

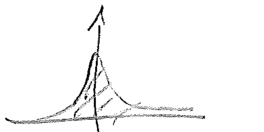


* der Nachteil dieser Darstellungen ist, daß sie nicht überall diff'bar sind

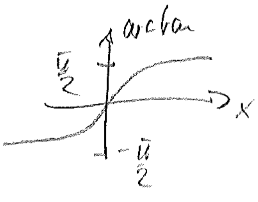
2. Klasse von Beispielen — glatt, und ∞ oft diff'bar

- Normierung wie bisher $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_\varepsilon(x) = 1$, aber $f_\varepsilon(x)$ "ausgedehnt" möglich, nur im Limes gilt zu $\nu > 0$ bel.: $f_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \quad \forall |x| > \nu$

Bsp: $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ Lorentzkurve



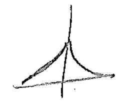
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{\varepsilon} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$



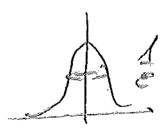
und für $|x| > r$, r fest

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \le \frac{\varepsilon}{x^2} < \frac{\varepsilon}{r^2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Bsp: Poissonverteilung $\underline{f_\varepsilon(x) = \frac{e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}}{2\varepsilon}}$ Ü 10.3.1



Bsp: Gaußkurve $\underline{f_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x^2/\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon\pi}}}$ Ü 10.3.2



(äquivalent zu $\Omega \to \infty$ von $f_{\frac{1}{\Omega}}(x) = \sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}\, e^{-\Omega x^2}$)

Bsp: auch uneigentliche Integrale können δ-Darstellungen:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} \quad \text{äquivalent } R\to\infty \quad \frac{\sin(xR)}{\pi x}$$

weil $$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipx}}_{\text{Hauptwert}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} dp\, e^{ipx} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{ix} e^{ipx}\Big|_{-R}^{R} = \underline{\lim_{R\to\infty} \frac{2}{x}\sin(Rx)}$$

und $$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ixp} = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{2\sin(Rx)}{x} \underset{y=Rx}{=} 2 \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \frac{\sin y}{y}}_{=\pi} = 2\pi$$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\frac{2}{x}\sin(Rx)$ ist δ-Darstellung, bzw

ohne Limes $$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipx} = \delta(x)}$$

bzw $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ip(x-x_0)} = \delta(x-x_0)$$

durch f. Testfunktion + analytisch, $\varphi \to 0$ f. $x \to \pm\infty$,

$$\varphi(0) \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\, \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{e^{ipx}}{2\pi} =$$

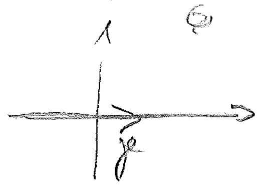
$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x)\, \frac{1}{\pi x} \sin(Rx) \underset{y=Rx}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi\left(\tfrac{y}{R}\right) \frac{\sin(y)}{\pi y}$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z=0}\, \psi\left(\tfrac{z}{R}\right) \frac{e^{iz}}{2iz\pi} = \psi(0)$$

s. S. 58 $\sin(y) = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right)$

* Beziehung zwischen $\delta(x)$ und P- und Hauptwert:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x+i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\,\delta(x)$$, als Integral mit Testfkt.:



$$P\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\psi(x)}{x} \underset{\text{s. 60}}{=} \frac{1}{2}\left(\mathcal{I} + \underset{\pm R}{\mathcal{R}}\right) \int_{\gamma} dz\, \frac{\psi(z)}{z}$$

$$= \frac{2R}{2} \int_{\gamma} dz\, \frac{\psi(z)}{z} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{I} - \mathcal{R}\right) \int_{\gamma} dz\, \frac{\psi(z)}{z}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma} dz\, \frac{\psi(z)}{z+i\varepsilon} + \frac{1}{2}\, 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=0} \frac{\psi(z)}{z}$$

Pol liegt rechts von γ bei $z = -i\varepsilon$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\psi(x)}{x+i\varepsilon} + \pi i\, \psi(0)$$