II.4. Fourierreihen [Arfken Kapitel 14]

- bisher: Taylor bzw Laurentreihe entwicklung von analytischen, d.h. ∞ oft diffb. Funktionen in $\mathbb{C}$, bzw mit Polen.
- diese ist problematisch für Funktionen mit Diskontinuitäten oder f. <u>periodische Funktionen</u>:

<u>Def</u>: Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, reel- oder komplex wertige Funktion $f(x), x \in \mathbb{R}$ heißt <u>periodisch</u> mit <u>Periode $L>0$</u> wenn

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+L) = f(x).$$

Damit folgt auch $f(x+nL) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

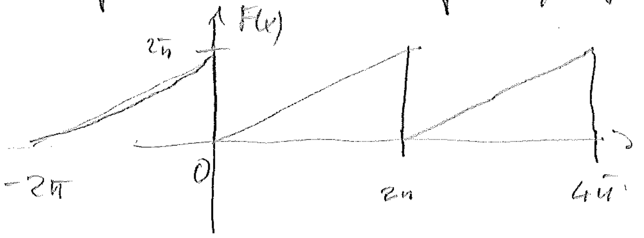
- Alle periodischen Funktionen f lassen sich auf eine periodische Fkt F abbilden, die auf einem festen Intervall periodisch ist, wir wählen hier das Intervall $[0, 2\pi]$:

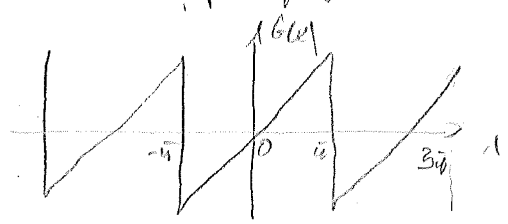
$$F(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \Rightarrow F(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right)$$
$$= f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = F(x)$$

* oftmals wir stattdessen $[-\pi, +\pi]$ gewählt.

$\Rightarrow$ im Folgenden betrachten wir nur noch 2π periodische Fkt ($=$ periodisch mit $L = 2\pi$).

Beispiele: $F(x) = x$ auf $[0, 2\pi]$: oder $G(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$:





* Gesucht: ONB für alle auf $[-\pi,\pi]$ periodischen Funktionen

mit Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^*(x)\, g(x)$

<u>Ansatz:</u> $\begin{cases} \cos(nx), & n = 0,1,2,\ldots \\ \\ \sin(mx), & m = 1,2,\ldots \end{cases}$

($-1,-2,\ldots$ brauchen wir nicht wegen $\cos(-nx) = +\cos(nx)$ nichts neues)

$m=0: \sin(0\cdot x) = 0$ kein Basisel. und $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ nichts neues)

(wir brauchen beide, um alle geraden u. ungeraden Fkt darzustellen)

• <u>benutze:</u> $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$, $e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$

sowie $\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{ikx} = \begin{cases} \frac{1}{ik} e^{ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k}\sin(k\pi) = 0 & f.\ k \neq 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx \cdot 1 = 2\pi & f\ k = 0 \end{cases} = 2\pi\,\delta_{k,0}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\sin(mx) = \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{inx}-e^{-inx}\right)\left(e^{imx}-e^{-imx}\right), \quad \text{für } n,m \geq 1$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dx \Big(\underbrace{e^{i(n+m)x}}_{\hat{=}0 \text{ da } n,m>0} - e^{i(n-m)x} - e^{i(m-n)x} + \underbrace{e^{-i(n+m)x}}_{\hat{=}0 \text{ da } n,m>0}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\pi\,\delta_{n-m,0} + 2\pi\,\delta_{m-n,0}\right) = \pi\,\delta_{n,m} \quad \text{für } n,m \geq 1$$

(alternativ $\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\sin(mx) = \ldots =$ 2x partielle Integration)

$-\frac{1}{m}\cos(mx)'$ $|m \geq 1$

<u>genauso</u> $\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos(nx)\cos mx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \Big(\underbrace{e^{i(n+m)x}}_{\hat{=}0 \text{ nur für } n+m>0} + e^{i(n-m)x} + e^{i(m-n)x} + \underbrace{e^{-i(n+m)x}}_{\hat{=}0 \text{ nur für } n+m>0}\Big)$

$$= \begin{cases} \pi\,\delta_{n,m} & \text{sonst} \\ 2\pi & \text{für } m=n=0 \end{cases}$$

sowie $\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{4i}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\left(e^{imx} + e^{-imx}\right)$

$$= \frac{1}{4i}\int_{-\pi}^{\pi} dx \Big(\underbrace{e^{i(n+m)x}}_{\to 0 \text{ da } n>0} - e^{-i(n-m)x} + e^{i(n-m)x} - \underbrace{e^{-i(n+m)x}}_{\to 0 \text{ da } n>0} \Big)$$

$$= \frac{1}{4i}\pi\left(-\delta_{n,m} + \delta_{n,m}\right) = 0 \qquad \text{für } n \geq 1,\ m \geq 0$$

d.h. $\cos(mx)$, $m \geq 0$ und $\sin(nx)$, $n \geq 1$ bilden eine ONB, denn:

<u>Normierung:</u> $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx)^2 = \|\sin(nx)\|^2 = 1 \qquad n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(mx)^2 = \|\cos(mx)\|^2 = 1 \qquad m = 1, 2, \ldots$$

aber $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(0\cdot x)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cdot 1 = 2$

also <u>Basis</u>*: $|\cos_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\cos_{m\geq 1}\rangle = \cos(mx)$, $|\sin_{n\geq 1}\rangle = \sin(nx)$

schreibe auf $[-\pi, \pi]$ periodische Funktion $f(x)$ in dieser Basis

(s. S67) $f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ auf $x \in [-\pi, \pi]$

$$= a_0 |\cos_0\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k|\cos_k\rangle + b_k|\sin_k\rangle\right)$$

dies ist die Fourierreihe von $f(x)$: $\left(|f\rangle = f_i |e_i\rangle\right)$ mit Koeffizienten $f_i = \langle e_i | f\rangle$:

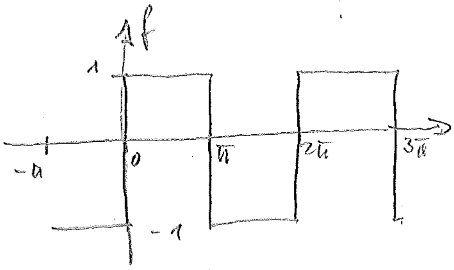
d.h. $\underline{a_0} = \langle \cos_0 | f\rangle = \langle \cos_0 | a_0 |\cos_0\rangle$ ($\perp$ auf Rest)
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$

$a_k = \langle \cos_k | f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(kx) f(x) \qquad k = 1, 2, \ldots$

$b_k = \langle \sin_k | f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(kx) f(x) \qquad k = 1, 2, \ldots$

* oft wird keine ONB benutzt, sondern $|\tilde{\cos}_0\rangle = \cos(0x) = 1$, dann ist $f(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2}|\tilde{\cos}_0\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \ldots$
und $\langle \tilde{\cos}_0 | f\rangle = \frac{\tilde{a}_0}{2}\langle \tilde{\cos}_0 | \tilde{\cos}_0\rangle = \frac{\tilde{a}_0}{2}\cdot 2 = \tilde{a}_0$, d.h. $a_0 = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2}}$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0] \\ +1 & x \in [0, +\pi] \end{cases}$ periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ mit Periode 2π



da f ungerade ist auf $[0, 2\pi]$ und $\cos(kx)$ gerade, ist $f(x)\cos(kx)$ ebenfalls ungerade

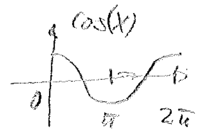
$$\Rightarrow \underline{a_k} = \langle \cos_k | f \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(kx) f(x) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2}} f(x) \end{cases} = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

und wir erhalten nur Koeff b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(kx) f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} dx \sin(kx)(-1) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx \sin(kx)(+1)$$

$y = -x$
$\sin(k(-y)) = -\sin(ky)$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(kx) = \frac{2}{\pi} \frac{(-)\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k} \Big(\underbrace{-\cos k\pi}_{-(-1)^k} + 1 \Big)$$



$$= \frac{2}{\pi k} \left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k |\sin_k\rangle = \sum_{\substack{l=1 \\ k=2l-1}}^{\infty} \frac{4}{\pi(2l-1)} \sin((2l-1)x)}$$

Dies ist die Fourierreihe der rechteckigen „Sägezahn"-Funktion

* Wann sind solche Fourierreihen konvergent?

Bevor wir diese Frage beantworten betrachten wir folgenden Basiswechsel zur üblichen Basis $|v_k\rangle = e^{ikx}$ $(= \cos kx + i \sin kx)$, $k \in \mathbb{Z}$

denn unter Benutzung von $\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$, $1 = e^{i0x}$

$\sin kx = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)$

erhalten wir

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} e^{i0\cdot x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right)$$

$$= \frac{a_0}{\sqrt{2}} e^{i0x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2} - i\frac{b_k}{2}\right) e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2}+i\frac{b_k}{2}\right) e^{-ikx}$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \text{mit } c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{\sqrt{2}} & k=0 \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k>0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}) & k<0 \end{cases}$$

$$|f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k |v_k\rangle \quad \left(= c_k|v_k\rangle \text{ mit } \Sigma\text{-Konvention}\right)$$

↑ definiert da $k<0$

* aufgrund des Integrals auf S 78:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} e^{+ilx} = 2\cdot\delta_{kl}$$ $\forall k,l \in \mathbb{Z}$

, d.h. die neue Basis ist orthogonal und wir müssen nicht mehr $k=0$ gebrauch betrachten.

* anstatt nun die Basis mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zu orthonormieren ändern wir das Skalarprodukt:

$$\langle v_k | v_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} e^{+ilx} = \delta_{kl}$$

mit $|v_k\rangle = e^{ikx}$, d.h. für die Koeffizienten bekommen wir

$$\boxed{c_k = \langle v_k | f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \underbrace{\langle v_k|v_l\rangle}_{\delta_{kl}}}$$

Zusammenfassend:

Def: Sei $f(x): \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine auf $[-\pi,\pi]$ integrierbare Funktion, die periodisch ist mit Periode 2π. Dann heißen

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} f(x)$$ die Fourierkoeffizienten von f

und $$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$ die Fourierreihe von f.

Konvergenz? Eindeutigkeit der Koeff. c_k?

Wenn die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}$ auf $[-\pi,\pi]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, dann gilt

$$\underline{c_k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f_\ell e^{i\ell x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} e^{i\ell x}}_{=\delta_{k\ell}} = \underline{f_k}$$

gleichmäßige Konvergenz ⇒ dürfen $\int$ u. $\sum_{\infty}$ vertauschen

d.h. dann sind die Koeff eindeutig.

I. A. konvergieren Reihen nicht immer gleichmäßig, oder sogar punktförmig.

Hilfssatz 1: Die Funktion $f(x)$ habe Fourier koeff c_k (in der ONB $|v_k\rangle$ von oben).

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \le \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k v_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2$

Beweis: Sei $S_n \equiv \sum_{k=-n}^{n} c_k v_k$ als partielle Summe für $n \in \mathbb{N}$ gegeben

$$\Rightarrow \|f - S_n\|^2 = \langle f - S_n | f - S_n\rangle = \underbrace{\langle f|f\rangle}_{\|f\|^2} - \langle S_n|f\rangle - \langle f|S_n\rangle + \langle S_n|S_n\rangle$$

wobei $\langle S_n|f\rangle \underset{\text{Linearität}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \langle v_k c_k|f\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k^* \underbrace{\langle v_k|f\rangle}_{c_k} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \in \mathbb{R}$

und damit $\langle f|S_n\rangle = \langle S_n|f\rangle^* = \langle S_n|f\rangle$

ferner gilt $\langle S_n|S_n\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k^* \langle v_k|S_n\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k^* \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell \underbrace{\langle v_k|v_\ell\rangle}_{\delta_{k\ell}} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$

$\square$

*Insbesondere gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le \|f\|^2 \Rightarrow$$

Besselsche Ungleichung: für f wie im Hilfssatz 1 oben gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le \underline{\underline{\|f\|^2}}$$