Konvergenz von Fourierreihen

- betrachte Konvergenz im quadratischen Mittel

$\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|^2 = 0$ für Funktionenfolge f_n,

$$\hat{=} \langle f-f_n | f-f_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx \, |f(x)-f_n(x)|^2$$

hier $f_n(x) = S_n = \sum_{k=-n}^{+n} c_k \langle v_k | f \rangle$

- wir haben schon gezeigt: Besselsche Ungleichung

S. 82 Hilfssatz 1: $0 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$

Wir brauchen die Parsevalsche Identität:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$$

da dann Konvergenz im quadratischen Mittel gilt.

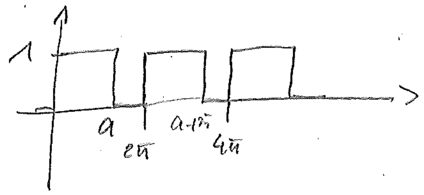
Bemerkung: Die orthonormale Menge $\{|v_k\rangle, k \in \mathbb{Z}\}$ ist vollständig (d.h. bildet ONB), wenn für alle Vektoren des Vektorraumes (d.h. hier aller periodischen, integrierbaren Fkt) die Parsevalsche Identität gilt.

Idee: Wir beweisen zuerst die Konvergenz im quadrat. Mittel für einfache Treppenfunktionen, dann für Summen davon, und gehen dann zum Riemannschen Integral über

Hilfssatz 2: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion auf $[0, 2\pi]$ und periodisch, dann konvergiert die Fourierreihe von f im quadratischen Mittel, d.h. $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|^2 = 0$

Beweis: für die einfachste Treppenfunktion $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < a \\ 0 & \text{für } a \le x < 2\pi \end{cases}$

(und $a \neq 0, 2\pi$ da sonst trivial)



$$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^a dx = \frac{a}{2\pi}, \quad |c_0|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2}$$

$$k \neq 0: \; c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^a dx \, e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{ik}\right) e^{-ikx} \Big|_0^a = \frac{i}{2\pi k} \left(e^{-ika} - 1\right)$$

$$\Rightarrow |c_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2 k^2} \left(e^{-ika} - 1\right)\left(e^{+ika} - 1\right) = \frac{1}{4\pi^2 k^2} \left(2 - \left(e^{-ika} + e^{ika}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \cos(ka)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} \left(1 - \cos(ka)\right)} \qquad (*)$$

Ü 4.2: $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ für $\mathrm{Re}(p) > 1$ konvergent,

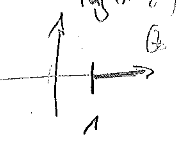
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent, und wegen $\left|\frac{\cos(ka)}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$ auch (Vergleichskriterium:

$S(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(ka)$ s. 18; sogar absolut $\forall\, a \in [0, 2\pi]$)

$$\Rightarrow S'(a) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ka}{k} = -\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{ia})^k - (e^{-ia})^k}{k} = +\frac{1}{2i} \left(\log(1 - e^{ia}) - \log(1 - e^{-ia})\right)$$

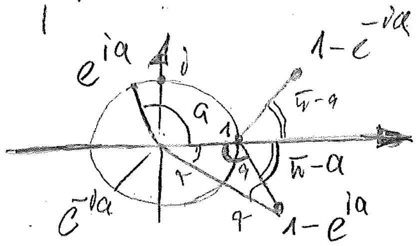
da $\log(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ konvergiert gleichmäßig für $|z| < 1$; nicht für $z = 1$ ($a = 0, 2\pi$) aber für alle $z = e^{\pm ia}$ sonst

↑ Ü 3.1.1



Bestimmung von: $\log(1-e^{\pm ia})$: $\quad |1-e^{-ia}| = |(e^{ia}-1)e^{-ia}| = |1-e^{+ia}|$

S.11: $\log(w) = \log|w| + i(\mathrm{Arg}(w) + 2\pi k)$ $\qquad$, $w = 1-e^{\pm ia}$



$\Rightarrow \log(1-e^{ia}) - \log(1-e^{-ia})$

$= i\left(-\left(\frac{\pi-a}{2}\right) + \cancel{2\pi k}\right) - i\left(\frac{\pi-a}{2} + \cancel{2\pi k}\right) = -2i\left(\frac{\pi-a}{2}\right)$ $\qquad \Rightarrow 2\alpha + a = \pi$

$\Rightarrow \quad S'(a) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = -\frac{\pi-a}{2}$ $\qquad \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi-a}{2}$

Stammfunktion $\qquad S(a) = \int da\, S'(a) = \int da \frac{a-\pi}{2} = \frac{a^2}{4} - \frac{\pi}{2}a + C$

und $S(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ka)}{k^2}$, d.h. $S(a=0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = C$

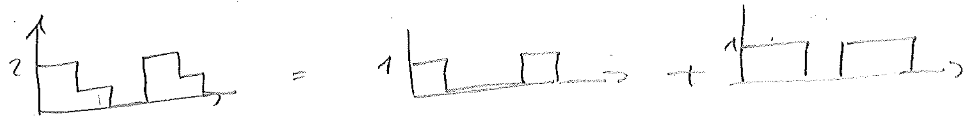
$\Rightarrow \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{k^2}} = C - \left(\frac{a^2}{4} - \frac{\pi}{2}a + C\right) = \underline{\frac{\pi}{2}a - \frac{a^2}{4}}$

$\Rightarrow (*) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}a - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^a dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\, |f(x)|^2$ $\boxed{\checkmark}$

d.h. Konvergenz im Mittel für <u>einfache</u> Treppenfunktion

<u>Für beliebige Treppenfkt:</u> $f(x) = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j f_j(x)$, $\quad f_j(x)$ einfache Treppenfkt

Beispiel $r=2$:



S_{jn} : n-te Partialsumme von f_j $\quad \sum_{k=-n}^{n} c_k^{(j)} \langle v_k | f_j \rangle \quad \Rightarrow S_n = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j S_{jn}$

$\Rightarrow \quad \|f - S_n\|^2 = \|\sum_{j=1}^{r} \gamma_j (f_j - S_{jn})\|^2 \leq \sum_{j=1}^{r} |\gamma_j|^2 \underbrace{\|f_j - S_{jn}\|^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ da einfache Treppe

benötigen Dreiecksungleichung, r-1 mal angewendet

Einschub: Schwarzsche und Dreiecks-ungleichung:

Schwarzsche ungleichung $\boxed{|\langle x|y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|}$ $\forall x,y \in VR$

- für $x=0$ trivial (oder $y=0$ oder beide)
- für $y\neq 0$: $\langle y|y\rangle > 0$

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$: $0 \le \|x-\lambda y\|^2 = \langle x-\lambda y | x-\lambda y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle - \lambda^*\langle y|x\rangle - \lambda\langle x|y\rangle + |\lambda|^2\langle y|y\rangle$$

also für $\lambda = \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}$: $0 \le \langle x|x\rangle - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}\langle y|x\rangle - \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}\langle x|y\rangle + \frac{|\langle x|y\rangle|^2}{\langle y|y\rangle^2}\langle y|y\rangle$

$$= \langle x|x\rangle - \frac{|\langle x|y\rangle|^2}{\langle y|y\rangle}$$

$\Leftrightarrow |\langle x|y\rangle|^2 \le \|x\|^2\cdot\|y\|^2$, Wurzel ziehen, fertig.

Dreiecksungleichung: $\boxed{\|x+y\|^2 \le \|x\| + \|y\|}$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle$

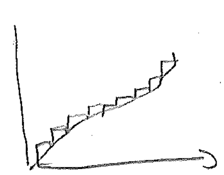
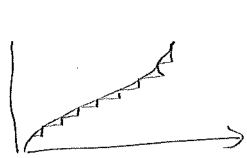
$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$, Wurzel ziehen

da $\langle y|x\rangle + \langle x,y\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle x|y\rangle \le 2\sqrt{\mathrm{Re}\langle x|y\rangle^2 + \mathrm{Im}\langle x|y\rangle^2} \underset{\text{Schwarz}}{\le} 2\|x\|\cdot\|y\|$

Zur Erinnerung: f Riemann-integrierbar falls Ober- = Unterintegral und dieses beschränkt, wobei

Oberintegral $\int_a^{b^*} dx\, f(x) = \inf\left\{ \int_a^b dx\, \varphi(x), \varphi \text{ Treppenfkt}, \varphi \ge f \right\}$

Unter — " — $\int_{a_*}^{b} dx\, f(x) = \sup\{ \qquad \le \}$

- uneigentliche Integrale wenn; a oder b $\to \pm\infty$, oder es Singularitäten gibt (→ Pek.) 86

Satz: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ periodisch und über $[0,2\pi]$ Riemann integrierbar.

Dann konvergiert die Fourierreihe von f im quadrat. Mittel gegen f

d.h. es gilt
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\,|f(x)|^2$$

In der Beweisskizze nehmen wir an daß $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sonst aufspalten nach $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$, sowie daß $|f(x)|<1\ \forall x\in[0,2\pi]$ (und damit auf $\mathbb{R}$), sonst reskalieren:

Für $\varepsilon>0$ vorgeg. gibt es periodische Treppenfkt $\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit
$$-1\le\varphi\le f\le\psi\le 1 \quad\text{und}\quad \int_0^{2\pi}dx\,[\psi-\varphi] \le \frac{\pi}{4}\varepsilon^2,$$
d.h. bel. nahe an f

betrachte $g=f-\varphi$:

$\Rightarrow |g(x)|^2 = |f(x)-\varphi(x)|^2 \le (\psi(x)-\varphi(x))^2 = \psi^2-2\psi\varphi+\varphi^2 \le [\psi(x)-\varphi(x)]$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\,|g(x)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\,[\psi(x)-\varphi(x)] \le \frac{\varepsilon^2}{8}$

- mit $f=g+\varphi$ gilt auch für die Partialsummen S_{fn}, S_{gn}, $S_{\varphi n}$

$S_{fn}=S_{gn}+S_{\varphi n}$

HS2: $\|\varphi-S_{\varphi n}\|\le\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall n\ge N$ (da φ Treppenfkt., konv.)

HS1: $\|g-S_{gn}\|^2 \overset{S.B.}{=} \|g\|^2-\|S_{gn}\|^2 \le \|g\|^2 \le \frac{\varepsilon^2}{8}$

$\Rightarrow \forall n\ge N\quad \|f-S_{fn}\| = \|\varphi-S_{\varphi n}+g-S_{gn}\|$
$$\le \|\varphi-S_{\varphi n}\|+\|g-S_{gn}\| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,2} < \varepsilon$$

Weitere Sätze zur Riemann-Integrierbarkeit

- Jede stetige Funktion ist Riemann-ibar
- Für jedes Riemann-ibare f ist $|f|^p$ Riemann-ibar $\forall p\in[1,\infty)$