Nicht jede Funktion ist Riemann-ibar:

__Bsp__ Dirichlet funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \text{ rational} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ irrational} \end{cases}$, z.B. auf $x \in [0,1]$

denn das Oberintegral ist 1 und das Unterintegral 0

→ Verallgemeinerter Integrationsbegriff: __Lebesgue-integrierbarkeit__
(wird in Analysis III = Maß- u. Integrationstheorie eingeführt)

- die Menge der Riemann-ibaren f ist eine __echte__ Teilmenge der Lebesgue ibaren
 __wenn__ f über eine kompakte Menge integriert wird!

 d.h. Riemann ibar ⇒ Lebesgue

 Lebesgue ⇏ Riemann

- aber uneigentliches Riemann Integral (z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$) ⇏ Lebesgue int.

 und " " " von $|f|$ ex ⇒ -"- -"-

- ∃ abzählbar viele unstetigkeiten: L ⇒ Riemann

__Bsp__: __Dirichlet fkt__ $\int_0^1 f\,dx = 0$ für Lebesgue Integral,

da $\mathbb{Q}$ in $[0,1]$ vom Maße Null.

__Notation:__

- $\mathcal{L}^p(D)$ Raum der __Lebesgue ibaren Fkt auf D__. Die Elemente
 bestehen aus Äquivalenzklassen von Fkt, die sich nur um Lebesgue-
 Nullmengen auf D unterscheiden, mit

 Norm $\|f\|_p = \left(\int_D dx\, |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ def. über L-$\int$

- $\mathcal{L}^2(D)$ ist ein Hilbertraum: VR der quadratintegrablen Funktionen,
 hat Skalarprodukt und ist vollständig

(. $C^p(D)$ die Menge aller p-mal stetig diffbaren Fkt)

⇒ hiermit lassen sich allgemeine Kriterien für die Konvergenz von Fourierreihen formulieren (ohne Beweis):

- Für jede Fkt $f \in \mathcal{L}^2$ konvergiert die Fourierreihe im quadrat. Mittel gegen f
- Theorem von Riesz und Fischer: Wenn $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ konvergiert, dann konvergiert die Fourierreihe im Mittel gegen eine Fkt $f(x) \in \mathcal{L}^2$ und es gilt $\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$
- Seien $f(x)$, $f'(x)$ in $[0, 2\pi]$ beschränkt u. stückweise stetig. Dann konvergiert die Fourierreihe in jedem Teilintervall, das keine Sprungstelle hat, punktweise gegen f.
- Dirichlet: Sei $f \in \mathcal{L}^1([0, 2\pi])$, stückweise stetig und habe endlich viele Maxima u. Minima. Dann konvergiert die Fourierreihe gegen f punktweise, und auf abgeschlossene Intervallen ohne Unstetigkeit sogar gleichmäßig

II 5 Integraltransformationen: Fourier trafo [Arfken Kap. 15]

- In vielen Problemen in der Physik, z.B. beim Lösen einer Diff.gl. ist es hilfreich, eine Integraltransformation durchzuführen vom Typ $\tilde{f}(\alpha) = \int_a^b dt\, f(t)\, K(\alpha, t)$, wobei K der Integralkern der Trafo

Bsp: $K(\alpha, t) = e^{i\alpha t}$ Fourier trafo auf $[a,b] = \mathbb{R}$

$= e^{-\alpha t}$ Laplace " — " — $\mathbb{R}_+$

$= t^{\alpha - 1}$ Mellin " — " — $\mathbb{R}_+$ usw.

so daß Problem für f $\xrightarrow{\text{∫-trafo}}$ einfaches Problem f. $\tilde{f}$ (anderer Lösgs o. Fkt. raum)

schwierig ↓ ↓ Lösg

f_0 Lösg des ursp. Probl. $\xleftarrow{\text{inverse ∫-trafo}}$ $\tilde{f}_0$

- es stellt sich sofort die Frage nach der Rück- oder inversen Trafo vom Lösgsraum als Problem. Hierzu werden wir wirklich komplexe Integrale benötigen!

Fouriertransformation als Limes der Fourierreihe:

$$f(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijy}, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad c_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\, e^{-ijy} f(y)$$

zurück von Periode 2π auf beliebige v. (S. 77): $\boxed{x = \frac{L}{\pi} y}$, $x \in [-L, L]$ (dann $L \to \infty$)

$$\Rightarrow f(x) = f\left(y = \frac{\pi}{L}x\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\overbrace{\frac{\pi}{L}}^{\equiv \Delta k}x}$$ ist periodisch mit Periode $2L$: $x \to x + 2L$

$$c_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} dx \frac{\pi}{L} e^{-ij\frac{\pi}{L}x} f(x) = \Delta k \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} dx\, e^{-ij\Delta k x} f(x)$$ Annahme, $\Delta k = \frac{\pi}{L}$

def $c_j \equiv \Delta k\, \tilde{f}(j\Delta k)\frac{1}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\tilde{f}(j\Delta k) = \int_{-L}^{L} dx\, e^{-ij\Delta k x} f(x); \; f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta k \tilde{f}(j\Delta k) e^{ij\Delta k x}}$

nun $L \to \infty$: Δk infinitesimal, f nicht mehr periodisch (Λ Periode: $[-L, L] \to \mathbb{R}$)

$j\Delta k \to k$ kontinuierlich, $\Sigma \to \int$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k) e^{ikx} \end{aligned}}$$ Fourier trafo / Fourier rück trafo

∃ unterschiedliche Konventionen:
- wo das $\frac{1}{2\pi}$ steht, oder symmetrisch $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bei beiden
- Vorzeichen fix in Trafo

andere Bezeichnung: $\boxed{\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)](k), \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(k)](x)}$

· Existenz von $\tilde{f}$: falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dann auch $e^{-ikx} f(x)$

da $\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{|e^{-ikx}|}_{1} |f(x)|$

aber i.A. ist $\tilde{f}(k) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Falls doch ∃ Umkehrtrafo $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{+ikx} \tilde{f}(k)$

Zusammenhang zur δ-Fkt (S. 76) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-y)} = \delta(x-y)$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(x-y) f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} e^{-iky} f(y)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-iky} f(y)}_{= \tilde{f}(k) \text{ Trafo}}}_{\text{Rücktrafo}}$$

Einige Beispiele: $f(x) = 1$ (∞ breit) $\Rightarrow \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} = \delta(k)\, 2\pi$ (∞ schmal)

$f(x) = \delta(x) \Rightarrow \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \delta(x) = 1$

umgekehrt

$f(x) = e^{ik_0 x} \Rightarrow \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i(k-k_0)x} = 2\pi\, \delta(k-k_0)$

$f(x) = \sum_j e^{ik_j x} \Rightarrow \tilde{f}(k) = 2\pi \sum_j \delta(k-k_j)$ "Frequenzanalyse"

Wichtige Eigenschaften der Fouriertrafo:

· Ableitungen $f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, ik \tilde{f}(k)$

dito $f^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} (ik)^n \tilde{f}(k)$ d.h. Ableitung wird zur Multiplikation (oder $\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f'(x) = \underbrace{e^{-ikx} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ sonst existiert nicht}} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left(\frac{d}{dx} e^{-ikx}\right)}_{-ik} f(x) = ik\tilde{f}(k)$)

usw für $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]$

Integration:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f_1^*(t)\, f_2(t) \quad , \text{ ersetze } f_{1,2} \text{ durch Rücktrafo von } \tilde{f}_{1,2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} e^{-ik_1 t} \tilde{f}_1^*(k_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} e^{ik_2 t} \tilde{f}_2(k_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \tilde{f}_1^*(k_1) \tilde{f}_2(k_2) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(k_2-k_1)t}}_{2\pi\,\delta(k_1-k_2)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1^*(k)\, \tilde{f}_2(k)$$

$\rightarrow$ insbes für $f_1 = f_2$: $\underbrace{\int dt\, |f(t)|^2}_{\text{Energie im Signal z.B.}} = \int \frac{dk}{2\pi} \underbrace{|\tilde{f}(k)|^2}_{\text{Energie im Frequenzintervall } [k, k+dk]}$ "power spectrum"

in physikal. Anwendung

Integralfaltung (~ convolution)

definiere $(p \otimes q)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, p(s)\, q(t-s)$ Faltung

$$\Rightarrow \mathcal{F}[(p\otimes q)(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} (p\otimes q)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, p(s)\, q(\underbrace{x-s}_{\text{subst. } y})$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds\, p(s)\, e^{-iks}}_{\tilde{p}(k)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-iky} q(y)}_{\tilde{q}(k)}$$

$$= \mathcal{F}[p(x)] \cdot \mathcal{F}[q(x)] \qquad \text{faktorisiert!}$$