(oder $\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f'(x) = \underbrace{e^{-ikx} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ sonst existiert } \mathcal{F} \text{ nicht}} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left(\frac{d}{dx} e^{-ikx}\right)}_{-ik} f(x) = ik\tilde{f}(k)$)

usw für $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]$

Integration:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f_1^*(t)\, f_2(t) \quad , \text{ ersetze } f_{1,2} \text{ durch Rücktrafo von } \tilde{f}_{1,2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} e^{-ik_1 t} \tilde{f}_1^*(k_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} e^{ik_2 t} \tilde{f}_2(k_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \tilde{f}_1^*(k_1) \tilde{f}_2(k_2) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(k_2-k_1)t}}_{2\pi\,\delta(k_1-k_2)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1^*(k)\, \tilde{f}_2(k)$$

$\Rightarrow$ insbes. für $f_1 = f_2$: $\quad \int dt\, |f(t)|^2 = \int \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2$ "power spectrum"

in physikal. Anwendung: $|f(t)|^2$: Energie im Signal z.Z. t; $|\tilde{f}(k)|^2$: Energie im Frequenzintervall $[k, k+dk]$

Integralfaltung (~ konvolution)

definiere $(p \otimes q)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, p(s)\, q(t-s)$ Faltung (Notation auch $(p*q)$!)

$$\Rightarrow \mathcal{F}[(p\otimes q)(x)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} (p\otimes q)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, p(s)\, q(\underbrace{x-s}_{\text{subst. } y})$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds\, p(s)\, e^{-iks}}_{\tilde{p}(k)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-iky} q(y)}_{\tilde{q}(k)}$$

$$= \mathcal{F}[p(x)] \cdot \mathcal{F}[q(x)]$$ faktorisiert!

1. Beispiel für die Lösung einer partiellen Differentialgl. mittels Fouriertrafo

Diffusionsgleichung $\boxed{\partial_t \phi(x,t) = D\, \partial_x^2 \phi(x,t)}$ D Diffusionskonstante

in 1 Dimension x

t : Zeit

(partielle Differentialgl.)

gesucht: Lösung $\phi = \phi(x,t)$ zu geg. Anfangsbed. für $t>0$

hier: wähle $\phi(x,t=0) = \delta(x)$ (Beispiel!)

- Fouriertrafo der ganzen Gl., bezüglich x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \partial_t \phi = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, D\, \partial_x^2 \phi(x,t)$$

; S. 91 (o. 2x Part. Int.)

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\partial_t \tilde{\phi}(k,t) = -k^2 D\, \tilde{\phi}(k,t)}$$

wird zur gewöhnlichen Diff.gl., mit Anfangsbed $\tilde{\phi}(k,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \delta(x) = 1$

$\Rightarrow$ Lösung im Fourierraum: $\boxed{\tilde{\phi}(k,t) = e^{-k^2 D t}}$, erfüllt

- Rücktransformation:

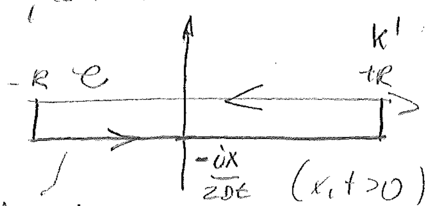
$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, e^{-k^2 D t}$$

, quadratische Ergänzung

im Exponenten: $-k^2 D t + ikx = -Dt\left(k^2 - \frac{ikx}{Dt}\right) = -Dt\left(\Big(\underbrace{k - \frac{ix}{2Dt}}_{k' \in \mathbb{C}}\Big)^2 + \frac{x^2}{4D^2t^2}\right)$

$$= e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-Dt\left(k - \frac{ix}{2Dt}\right)^2}$$

, substituiere $k \to k'$



$$= e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \int_{\mathcal{C}} \frac{dk'}{2\pi}\, e^{-Dt k'^2}$$

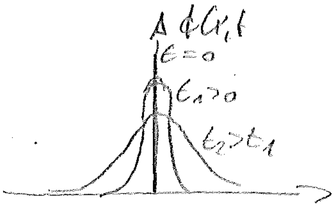
$$= e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\, e^{-Dt k'^2}}_{= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{Dt}}}$$

$\mathcal{C}$: Integrationsweg

kein Pol, schließe zu geschlossenem Weg, $\oint_{\mathcal{C}}$ gibt 0.

Lösung der 1-dim Diffusionsgleichung mit A.B. $\phi(x,t=0)=\delta(x)$

$$\phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\, 4Dt}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$



(check: im Limes $t\to 0$ Gauß-Darstellung der δ-Funktion, s. S.75, u. Ü 10.3.2)

- diese heißt <u>heat kernel</u> (Hitze-kern) ($\to$ Wärmeleitung im Draht)

und kann auch in d Dimensionen betrachtet werden, wobei $\partial_x^2 \to \Delta$ (s. Einschub)

<u>2. Beispiel</u> für die Lösung einer partiellen Diff.gl. (PDE = partial differential eq.)

1D-Wellengleichung $\boxed{\partial_t^2 y(x,t) = v^2\, \partial_x^2 y(x,t)}$

mit <u>Anfangsbedingungen</u> $y(x,0)=f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ lokalisiert,
$\partial_t y(x,0) = g(x) \in L^1$ insbes. $\lim_{x\to\pm\infty} \begin{Bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{Bmatrix} = 0$
abfallend

wg. Fouriertrafo der AB: $\tilde f, \tilde g$

$$v^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \partial_x^2 y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \partial_t^2 y(x,t)\, e^{-ikx}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{v^2 (ik)^2\, \tilde y(k,t) = \partial_t^2\, \tilde y(k,t)} ,$$

bei der partiellen Integration brauchen wir

wird zur gewöhnlichen Diffgl. (ordinary diff. eq = ODE)

mit 1. AB: $\tilde y(k,t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \underset{y(x,t=0)}{\underbrace{f(x)}} = \tilde f(k)$

$\Rightarrow$ allgem. Lsg $\tilde y(k,t) = c_1(k)\, e^{+ivkt} + c_2(k)\, e^{-ivkt}$

Einschub: Fourier trafo in $d>1$ Dimensionen:

$\vec{x} \in R^n$, z.B. $n=3$: $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$F[f(\vec{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_n \, e^{-ik_1 x_1} \dots e^{-ik_n x_n} f(\vec{x})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^n k \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) = \tilde{f}(\vec{k})$$

und entsprechend

$$F^{-1}[\tilde{f}(\vec{k})](\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n k \, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k})$$

und es gilt

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n k \, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} = \delta^{(n)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= \delta(x_1 - y_1) \dots \delta(x_n - y_n)$$

und AB $\quad \tilde{y}(k,0) = C_1(k) + C_2(k) = \tilde{f}(k)$

$$\partial_t \tilde{y}(k,0) = i v k \left(C_1(k) - C_2(k)\right) = \tilde{g}(k)$$

$$\Rightarrow \quad C_1(k) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(k) + \frac{\tilde{g}(k)}{i v k}\right), \quad C_2(k) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(k) - \frac{\tilde{g}(k)}{i v k}\right)$$

$\Rightarrow$ Lösung:

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(C_1(k)\, e^{ivkt + ikx} + C_2(k)\, e^{-ivkt + ikx}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\tilde{f}(k) + \frac{\tilde{g}(k)}{ivk}\right) e^{ik(x+vt)}}_{\substack{\text{Anteil Wellenlösung} \\ x \leftarrow}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\tilde{f}(k) - \frac{\tilde{g}(k)}{ivk}\right) e^{ik(x-vt)}}_{\substack{\text{Anteil Wellenlösung} \\ x \rightarrow}}$$

* linkes und rechts laufende Wellen, in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

II 6 Laplacetransformation [Arfken 15.8]

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \int_0^{\infty} dt\, f(t)\, \underbrace{e^{-pt}}_{K(p,t)\ \text{Integralkern}} \left(= \hat{f}(p)\right) \qquad \mathrm{Re}\, p > 0$$

: für alle diese Integraltrafos (Fourier, Laplace, Mellin, ...) gilt

$$\underline{\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]}$$

daß diese linear sind