Existenz: im Gegensatz zur Fouriertrafo muß $f(t)$ alleine nicht unbedingt auf $\mathbb{R}_+$ integrierbar sein, es genügt wenn es beschränkt ist (oder sogar anwächst):

Satz: Wenn $f(t)$ auf $\mathbb{R}_+$ keine Singularitäten hat und $\exists p_0 \in \mathbb{R}$, sodass $|e^{-p_0 t} f(t)| \leq M \quad \forall t \geq t_0$, dann existiert

$\mathcal{L}[f](p) \quad \forall p$ mit $\mathrm{Re}\, p > p_0$.

(denn: $\left|\int_0^\infty dt f(t) e^{-pt}\right| = \left|\int_0^{t_0} dt f(t) e^{-pt} + \int_{t_0}^\infty dt f(t) e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t}\right|$

$\leq \ldots \leq \underbrace{\int_0^{t} dt |f(t) e^{-pt}|}_{\text{endlich}} + \int_{t_0}^\infty dt \underbrace{|f(t) e^{-p_0 t}|}_{\leq M} e^{-(p-p_0)t} < \infty \quad \forall p : |p| > p_0$)

Beispiele für nicht Laplace transformierbare Funktionen:

$f(t) = e^{+t^2}$: Problem Abfall bei $t \to \infty$, $e^{t^2 - pt} \to \infty$

$f(t) = t^n$ für $n \leq -1$, Problem: $\int_0^1 dt\, t^n e^{-pt}$ ex. nicht aufgrund der Singularität bei $t=0$

• Rücktrafo $\mathcal{L}^{-1}$? zunächst

Beispiele für Laplace trafos $\mathcal{L}[f(t)](p)$

① $f(t) = t^n$ für $n > -1$

$n=0$: $f(t) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}[1](p) = \int_0^\infty dt\, 1\, e^{-pt} = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$

brauche $\mathrm{Re}\, p > 0$

$n=1$: $\partial_p \mathcal{L}[1](p) = \int_0^\infty dt (-t) e^{-pt} = -\frac{1}{p^2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}[t](p) = \frac{1}{p^2}$

$$\partial_p^2 \mathcal{I}[1](p) = \int_0^\infty dt\,(-t)^2 e^{-pt} = \frac{2}{p^3} \Rightarrow \mathcal{I}[t^2](p) = \frac{2}{p^3}$$

iteriert für $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{I}[t^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

oder allgemein wegen $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dt\, t^n e^{-t} \underset{t=sp}{=} p^{n+1} \int_0^\infty ds\, s^n e^{-sp}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{I}[t^n](p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}} \quad \text{für } n > -1,\ \mathrm{Re}\, p > 0$$

Bsp Exponentialfunktion, hyperbolische u. Winkelfunktionen

- $\mathcal{I}[e^{kt}](p) = \int_0^\infty dt\, e^{-(p-k)t} = \frac{1}{p-k}$, konvergent für $\mathrm{Re}(p-k) > 0$.

- $\mathcal{I}[\cosh(kt)](p) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, (e^{kt} + e^{-kt}) e^{-pt}$

linear

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-k} + \frac{1}{p+k}\right) = \frac{p}{p^2 - k^2} \quad \mathrm{Re}(p-k) > 0$$

dito

- $\mathcal{I}[\sinh(kt)](p) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, (e^{kt} - e^{-kt}) e^{-pt}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-k} - \frac{1}{p+k}\right] = \frac{k}{p^2 - k^2} \quad \mathrm{Re}(p-k) > 0$$

und mit $\cos(kt) = \cosh(ikt)$, $\sin(kt) = \frac{1}{i}\sinh(ikt)$

ergibt sich

$$\mathcal{I}[\cos(kt)](p) = \frac{p}{p^2 - (ik)^2} = \frac{p}{p^2 + k^2} \quad \mathrm{Re}(p - ik) > 0$$

$$\mathcal{I}[\sin(kt)](p) = \frac{ik}{i(p^2 - (ik)^2)} = \frac{k}{p^2 + k^2} \quad \text{— " —}$$

Eigenschaften der Laplace-trafo

- Ableitungen: $\mathcal{L}[f'(x)](p) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f'(t)$

$$= e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dt\,(-p) e^{-pt} f(t)$$

d.h. Randterm verschwindet i.A. nicht!

$$= -f(0) + p\,\mathcal{L}[f(x)](p)$$

$$\mathcal{L}[f''(x)](p) = \mathcal{L}[g'(x)](p) \quad \text{mit } g = f'$$

$$= p\,\mathcal{L}[g(x)](p) - g(0) = p\,\mathcal{L}[f'] - f'(0)$$

$$= p\{p\,\mathcal{L}[f] - f(0)\} - f'(0)$$

$$= p^2\,\mathcal{L}[f] - p f(0) - f'(0)$$

n-te Ableitung: iteriert erhalten wir

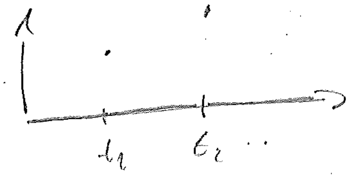
$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)](p) = p^n\,\mathcal{L}[f(x)](p) + \left(-p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)\right)$$

(~~• Integralfaltung später!~~)

- Rücktransformation von Laplace $\mathcal{L}^{-1}$:

Wie bei der Fourier trafo ist die Laplace trafo dann nützlich, wenn man die Rücktrafo durchführen kann. Allerdings gilt:
Wenn die beiden Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ dieselbe Laplace trafo haben, d.h. $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2] = F(x) \not\Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \;\forall x \in \mathbb{R}$

D.h. $\mathcal{L}^{-1}$ ist nicht unbedingt eindeutig. Es gilt aber der Satz von Lerch: $\int_0^{t_0} dt\,\underbrace{(f_1(t) - f_2(t))}_{=N(t)} = 0 \quad \forall t_0 > 0$, d.h. $f_1(x)$ und $f_2(x)$ unterscheiden sich nur $\Leftarrow N(t)$ in isolierten Punkten.

z.B. $N(t)$  fast überall Null.

Eine Möglichkeit, die Laplace trafo zu invertieren ist es, Tabellen von $f(t)$ und $\mathcal{L}[f(t)]$ zu erstellen, und wie folgt zu benutzen:

<u>Beispiel</u>: Gesucht: Rücktrafo für $F(p) = \frac{k^2}{p(p^2-k^2)}$: $\mathcal{L}^{-1}[F] = f = ?$

Partialbruch zerlegung: $F(p) = \frac{a}{p} + \frac{b+cp}{p^2-k^2} = \frac{a(p^2-k^2)+bp+cp^2}{p(p^2-k^2)}$

$$\Rightarrow b=0,\ a=-1,\ a+c=0 \text{ d.h. } c=1$$

Die Rücktrafo von $F(p) = \frac{-1}{p} + \frac{p}{p^2-k^2}$ können wir anhand von bekannten Trafos (s.S. 96/97) finden

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)](x) = -1 + \cosh(kx)$$

und genauso für $G(p) = \frac{k^2}{p(p^2+k^2)}$

<u>Integraldarstellung der inversen Laplace-trafo:</u>

Ziel: schreibe zu transformierendes $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]]$ um $\mathcal{L}^{-1}$ abzulesen.

- schreibe $f(t) = e^{\gamma t} g(t)$ für $\gamma > 0$ <u>fest</u>,

  mit $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ (*)

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} e^{\gamma t} g(t) = \int_0^\infty dt\, e^{-(p-\gamma)t} g(t)$$

existiert für $\mathrm{Re}\, p > \gamma$, und $g(t)$ ohne Singularitäten.

· setze $g(t)=0$ für $t<0$, dies beeinflußt die Laplace-trafo nicht

dann gilt wegen der Bed. * daß $g(t)$ Fouriertransformierbar ist

$$t>0: \quad g(t) = \int_0^\infty dt'\, \delta(t-t')\, g(t') = \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega(t-t')}\, g(t')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t} \int_0^\infty dt'\, e^{-i\omega t'}\, g(t') \quad , \omega \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^{\gamma t} g(t) = e^{\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t} \int_0^\infty dt'\, e^{-i\omega t'}\, f(t')\, e^{-\gamma t'}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{(\gamma+i\omega)t} \int_0^\infty dt'\, e^{-(\gamma+i\omega)t'} f(t')$$

Variablenwechsel $s = \gamma + i\omega$, $\operatorname{Re} s = \gamma > 0$ fest

$d\omega = -i\,ds$, Grenzen $\omega = \pm\infty \Rightarrow s = \gamma \pm i\infty$

$$= \underbrace{\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{2\pi i}\, e^{st}}_{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\int_0^\infty dt'\, e^{-st'} f(t')}_{\mathcal{L}[f(t)](s)}$$

Bemerkungen: · falls $f(t) \sim e^{\alpha t}$, dann sollte $\gamma > \alpha$ sein (z.B. für $f(t) = \cosh(\alpha t)$)

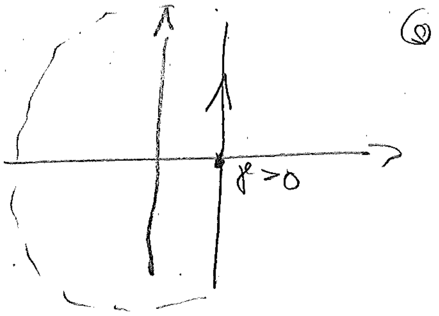
damit $g(t) \sim e^{(\alpha-\gamma)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

· ursprünglich war $f(t)$ auf der positiven reellen Achse definiert,

jetzt ist die Laplace-trafo $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ mit $s \in \mathbb{C}$

→ der Weg für die Rücktrafo muß für $s \to -\infty$ geschlossen

werden, damit $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ wieder etwas reelles liefert:



Γ

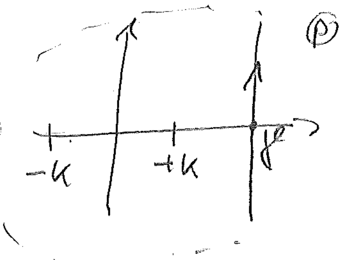
d.h. $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \oint_\Gamma ds\, e^{st}\, F(s)$

Falls $F(s)$ Singularitäten in der rechten Halbebene von $\mathbb{C}$ hat, hängt das Resultat von $\oint_\Gamma ds$ davon ab, ob diese innerhalb oder außerhalb von Γ liegen: also wähle $\gamma > 0$ groß genug, daß alle Singularitäten <u>innerhalb</u> von Γ liegen, denn nur so wird das Ergebnis von $\mathcal{L}^{-1}$ eindeutig und unabhängig von γ sein!

<u>Beispiel für die Berechnung der Inversen $\mathcal{L}^{-1}$:</u>

$F(p) = \dfrac{k}{p^2-k^2}$, hat <u>einfache Pole bei $p = \pm k$</u> (wir wissen schon das Ergebnis; s. S. 97 $F(p) = \mathcal{L}[\sinh(kt)]$)

also wähle $\gamma > k$



d.h. $$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} dp\, e^{pt} \frac{k}{p^2-k^2}$$

und wir schließen mit Halbkreis links, wegen $\mathrm{Re}\, p < 0$ und daß $e^{pt} \to 0$

Residuensatz: $$f(t) = \mathrm{Res}_{p=-k}\, e^{pt} \frac{k}{(p-k)(p+k)} + \mathrm{Res}_{p=+k} \left(e^{pt} \frac{k}{(p+k)(p-k)} \right)$$

$$= e^{-kt} \frac{k}{-2k} + e^{kt} \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt} \right)$$

$$= \sinh(kt) \quad \checkmark$$

<u>Bemerkung</u>: Wenn $F(p)$ Schnitte oder andere singuläre Bereiche hat, muss der Hilfsweg zum Schließen des Konturintegrals anders gewählt werden.

<u>1. Beispiel</u>: Lösung einer Diff.-gl. mittels Laplace:

harmonischer Oszillator: $\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\ddot{x}] + \omega_0^2 \mathcal{L}[x] = 0 \qquad , \mathcal{L}[x(t)] = X(p)$$

S. 98

$$\Leftrightarrow p^2 X(p) - p x(0) - \dot{x}(0) + \omega_0^2 X(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + \omega_0^2) X(p) - p x(0) - \dot{x}(0) = 0$$

$$\Rightarrow X(p) = \frac{p}{p^2+\omega_0^2} x(0) + \frac{1}{p^2+\omega_0^2} \dot{x}(0)$$

Rücktrafo mittels Tabelle S. 97: $\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)](p) = \frac{p}{p^2+\omega_0^2}$

$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)](p) = \frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = x(0)\cos(\omega_0 t) + \dot{x}(0)\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$ (wie wir natürlich wussten)

check AB: $x(t=0) = x(0)\cdot 1 + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\cdot 0 = x(0)$

$\dot{x}(t=0) = -\omega_0 x(0) \sin(\omega_0 t)\big|_{t=0} + \dot{x}(0)\cos(\omega_0 t)\big|_{t=0} = \dot{x}(0)$ ✓