2. Beispiel: getriebene Schwingungsgleichung mit (spezieller) Dämpfung:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = t^3 e^t$$

mit AB $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, Notation $\mathcal{L}[y(t)](p) = \underline{Y}(p)$

→ Laplacetrafo der Differentialgleichung

linke Seite $= \mathcal{L}[\ddot{y}] - 2\mathcal{L}[\dot{y}] + \mathcal{L}[y]$ benutze S. 98

$$= p^2 \underline{Y}(p) - p\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{\dot{y}(0)}_{0} - 2p\left(\underline{Y}(p) - \underbrace{y(0)}_{0}\right) + \underline{Y}(p)$$

$$= p^2 \underline{Y}(p) - 2p\underline{Y}(p) + \underline{Y}(p) = \underline{(p-1)^2 \underline{Y}(p)}$$

rechte Seite $= \mathcal{L}[t^3 e^t] = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} t^3 e^t = \int_0^\infty dt\, e^{-(p-1)t} t^3$

$$= \mathcal{L}[t^3](p-1) \underset{S. 97}{=} \frac{\Gamma(3+1)}{(p-1)^{3+1}} = \underline{\frac{3!}{(p-1)^4}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Y}(p) = \frac{3!}{(p-1)^6}}$$ Lösung im Laplace-Raum

Rücktrafo aus Tabelle: $\mathcal{L}[t^5 e^t] = \frac{5!}{(p-1)^6}$

$$\Rightarrow \underline{y(t) = \frac{1}{4\cdot 5} t^5 e^t}$$ (check: $y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = \frac{1}{4} t^4 e^t + \frac{1}{4\cdot 5} t^5 e^t \Big|_{t=0} = 0$)

- eine Eigenschaft der Laplace-trafo haben wir noch nicht untersucht: ob wie bei Fourier die Trafo einer Integralfaltung faktorisiert.

Integralfaltung und Laplace-Trafo

Betrachte 2 als bekannt gegebene Trafos

$$\mathcal{L}[g(t)](p) = G(p) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} g(t) \quad \text{und}$$

$$\mathcal{L}[h(t)](p) = H(p) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} h(t)$$

, d.h. h, g auf $\mathbb{R}_+$ def und $\mathcal{L}$ existiert

Produkt: $G(p) \cdot H(p) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} g(t) \int_0^\infty dt' e^{-pt'} h(t')$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt'\, e^{-(t+t')} g(t)\, h(t')$$

Substituiere $t' \to x = t + t'$ bei festem t

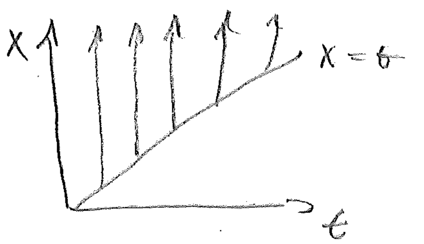
$\Rightarrow dx = dt'$, und zu $t' = 0 : x = t$

$t' = \infty : x = \infty$

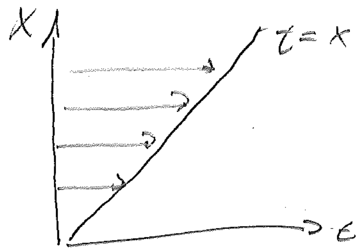
$$\Rightarrow G(p) \cdot H(p) = \int_0^\infty dt \int_t^\infty dx\, g(t)\, h(x-t)\, e^{-px}$$

Ziel: Vertausche die Integrationen, um dies als Laplace-Trafo eines Integrals zu schreiben:

oben



→ integriere erst über t zu festem x



$$\Rightarrow G(p) \cdot H(p) = \int_0^\infty dx \underbrace{\int_0^x dt\, \overset{\geq 0}{g(t)}\, h(\overset{\geq 0}{x-t})}_{(g * h)(x)} e^{-px}$$

Faltung von g und h (anders als bei Fourier)

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{L}[g(x)](p)\, \mathcal{L}[h(x)](p) = \mathcal{L}[(g*h)(x)](p)}$$

mit Rücktrafo $\underline{(g*h)(x) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[g] \cdot \mathcal{L}[h]](x)}$

Beispiel für Anwendung der Integral-Konvolution:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = 3e^{t} \quad \text{mit AB } y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

L: wie auf S. 103 $\Rightarrow$

$$(p^2 + p - 2)Y(p) = 3\,\mathcal{L}[e^{t}] \quad , \; Y(p) = \mathcal{L}[y(t)](p)$$

$$\Rightarrow \underline{Y(p) = \frac{3}{p^2+p-2}\,\mathcal{L}[e^{t}]} \qquad *$$

• Partialbruchzerlegung: $\quad p^2+p-2 = (p-1)(p+2)$

d.h. $$\frac{3}{p^2+p-2} = \frac{(p+2)-(p-1)}{p^2+p-2} = \frac{(p+2)-(p-1)}{(p+2)(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2}$$

(wie schon im vorherigen Bsp treten Polynome in p im Zähler und Nenner auf)

mit $\mathcal{L}[e^{kt}](p) = \frac{1}{p-k}$ S. 97 haben wir also

$$Y(p) = \left(\mathcal{L}[e^{t}](p) - \mathcal{L}[e^{-2t}](p)\right)\cdot\mathcal{L}[e^{t}] \qquad \text{Produkt von } \mathcal{L}\text{'s}$$
$$= \mathcal{L}[e^{t} * e^{t}](p) - \mathcal{L}[e^{-2t} * e^{t}] = \mathcal{L}[y(t)]$$

$$\Rightarrow \underline{y(t)} = (e^{t} * e^{t} - e^{-2t} * e^{t})(t)$$
$$= \int_0^t dt'\, e^{t'} e^{t-t'} - \int_0^t dt'\, e^{-2t'} e^{t-t'}$$
$$= e^{t} \int_0^t dt' (1 - e^{-3t'}) = e^{t}\left[t' + \frac{1}{3}e^{-3t'}\right]_0^t =$$
$$= e^{t}\left[t + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3}\right] = \underline{\left(t - \frac{1}{3}\right)e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t}}$$

Auch:
dies ginge auch direkt als Alternative, nur mit Partialbruchzerlegung:

in * $\mathcal{L}[e^{t}] = \frac{1}{p-1} \Rightarrow Y(p) = \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2}\right)\frac{1}{p-1} = \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2}\right)$

S. 97 bzw S. 103: $\Rightarrow Y(p) = \mathcal{L}[t](p-1) - \frac{1}{3}\mathcal{L}[1](p-1) + \frac{1}{3}\mathcal{L}[1](p+2)$
$$= \mathcal{L}[te^{t}](p) - \frac{1}{3}\mathcal{L}[e^{t}](p) + \frac{1}{3}\mathcal{L}[e^{-2t}](p) = \mathcal{L}[y(t)](p)$$

$\Rightarrow \quad y(t) = t e^{t} - \frac{1}{3} e^{t} + \frac{1}{3} e^{-2t}$ ✓

- Nun dasselbe physikalische Beispiel mit bel. Dämpfungs- u. Federkonst. sowie allgemeiner treibender Kraft:

$\ddot{y}(t) + 2\gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t)$. wähle AB $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

$f(t) = 0$ für $t > 0$

$\mathcal{L}: \quad (p^2 + 2p\gamma + \omega_0^2) Y(p) = F(p) \quad (= \mathcal{L}[f(t)](p))$

$\Leftrightarrow \quad Y(p) = \dfrac{F(p)}{(p+\gamma)^2 + \omega_1^2}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ $\quad **$

s. 97: $\mathcal{L}[\sin(\omega_1 t)](p) = \dfrac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$, hier $p \to p + \gamma$

und Ergebnis von Laplace $\mathcal{L}[e^{kt} f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p-k)$

$\to$ Ü 14)

d.h. $Y(p) = \frac{1}{\omega_1} \mathcal{L}[e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t)](p) \; \mathcal{L}[f(t)](p)$

Faltung: $\Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\omega_1} \displaystyle\int_0^t dt' \, e^{-\gamma t'} \sin(\omega_1 t') \, f(t-t')$, für $t > 0$

Lösung für beliebige treibende Kraft mit AB von oben

z.B. $f(t) = p\,\delta(t)$ Stoß bei $t=0$ $\Rightarrow y(t) = \frac{p}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t)$.

z.B. $f(t) = A \sin \omega_a t$ getriebene Schwingung.

$\Rightarrow F(p) = A \dfrac{\omega_a}{p^2 + \omega_a^2}$, hier ist es günstiger, in $**$

das Produkt mittels Partialbruchzerlegung auf elementare Laplace-trafos zurückzuführen.

II.7 Weitere Integraltrafos:

- $\mathcal{H}_n[f(t)](s) = \int_0^\infty dt\, f(t)\, t\, J_n(st)$ Hankel-trafo

  Besselfunktion 1. Ord

  (auch Fourier-Besseltrafo)

- wir betrachten hier etwas ausführlicher die

Mellintrafo $\mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^\infty dt\, f(t)\, t^{s-1} \quad (= \tilde{f}(s))$

mit Inversen $\mathcal{M}^{-1}[\tilde{f}(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} ds\, t^{-s} \tilde{f}(s)$

Herleitung aus inverser Laplace-trafo:

$$\mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^\infty dt\, f(t)\, t^{s-1} \quad , \quad \text{Substitution } t = e^x, \; dt = dx\, e^x$$

$$= \int_{-\infty}^\infty dx\, e^x f(e^x)(e^x)^{s-1}$$

$$= \int_{-\infty}^\infty dx\, e^{sx} f(e^x) = \int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-(-s)x} F(x)$$

def $F(x) = f(e^x)$, wir suchen die Inversion bzgl. $t = e^x \iff x = \log t$

$\iff F(\log t) = f(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{M}[f(t)](-s) = \mathcal{L}[F(x)](s) = \mathcal{L}[F(\log t)](s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^{-1}[M_f(-s)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} ds\, e^{-s\log t} M_f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} ds\, t^{-s} M_f(s)$$

Beispiele: S. 23: $\Gamma(z) = \mathcal{M}[e^{-t}](z) = \int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{z-1}$

und Ü 4.2 Riemannsche ζ-Funktion

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \mathcal{M}\left[\frac{1}{e^t - 1}\right](z) = \int_0^\infty dt\, \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$$

hieraus läßt sich eine wichtige Funktionalgl. für $\zeta(z)$ herleiten [Arfken Kap. 33]