• Summe von 2 Gauß Zufallsvariablen ist Gauß: [Arfken 19.5]

x, y Gauß verteilt. $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$, $p(y)$ dito

zentriert: $\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, p(x) = 0$ Mittelwert
$(= \langle x \rangle)$

Varianz $\mathbb{E}(x - \mathbb{E}(x))^2 = \sigma^2$

def neue Zufallsvariable $z = x + y$, Verteilung? $(\sigma \equiv 1)$

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \delta(z - (x+y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}(x^2 + (x-z)^2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x - \frac{z}{2})^2}$$

Exponent $-\frac{1}{2}(2x^2 - 2xz + z^2)$
$= -\frac{z^2}{2} - (x - \frac{z}{2})^2 + \frac{z^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \underline{p(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2}}}$$ wieder Gauß, größere Varianz $\sigma = 1 \to \sqrt{2}$

• Produkt von 2 Gaußschen Zufallsvariablen $\neq$ Gauß

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \delta(z - x\cdot y),$$ neue Zufallsvariable $z = x \cdot y$

Mellin trafo $\underline{\mathcal{M}[p(z)](s)} = \int_0^{\infty} dz\, p(z)\, z^{s-1}$, $z > 0$, d.h. $x \cdot y > 0$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} dx dy + \int_{-\infty}^{0} dx dy \right) (xy)^{s-1} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx\, x^{s-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{\infty} dy\, y^{s-1} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \underline{\mathcal{M}[e^{-\frac{x^2}{2}}](s) \cdot \mathcal{M}[e^{-\frac{y^2}{2}}](s)}$$ Produkt der Mellin-trafos

hier können wir auch $p(z)$ direkt berechnen

Vgl. S. 72: l. S

$$\underline{p(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{|x|} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2x^2}} = p(-z)$$

$\frac{x^2}{|z|} = r$, so $\frac{2 dx\, x\, z}{2x^2} = \frac{dr}{x^2}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r} e^{-\frac{|z|}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)} = \underline{\frac{1}{\pi} K_0(|z|)}$$

Ü 9.3.

mit Asymptotik $\underset{|z| \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi |z|}} e^{-|z|}$

$\neq$ Gauß

III Operatoren und Spektraltheorie

III 1. Symmetrische und Hermitesche Operatoren

A) Symmetrische Operatoren:

Betrachte einen Vektorraum (VR) V über $K = \mathbb{R}$ mit reellem Skalarprodukt $\underline{a}, \underline{b} \in V \to \langle a | b \rangle$ (V muß nicht endl. dim sein)

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi: \underline{u} \in V \to \varphi(\underline{u}) \in V$

Def: φ heißt orthogonal wenn gilt: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V \quad \langle \varphi(\underline{u}) | \varphi(\underline{v}) \rangle = \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle$

Sei $\{\underline{e}_i\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von V:

$$\langle \underline{e}_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall_{ij}$$

Dann ist φ orthogonal genau dann wenn $\forall_{ij} \; \langle \varphi(\underline{e}_i) | \varphi(\underline{e}_j) \rangle = \delta_{ij}$ $(= \langle \underline{e}_i | \underline{e}_j \rangle)$

denn $\langle \varphi(\underline{u}) | \varphi(\underline{v}) \rangle \underset{\varphi \text{ linear}}{=} \sum_{ij} u_i \underbrace{\langle \varphi(\underline{e}_i) | \varphi(\underline{e}_j) \rangle}_{\delta_{ij}} v_j = \sum_j u_j v_j$

und $\underline{u} = \sum_i u_i \underline{e}_i, \; \underline{v} = \sum_j v_j \underline{e}_j$ mit $\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = \sum_{ij} u_i \underbrace{\langle \underline{e}_i | \underline{e}_j \rangle}_{\delta_{ij}} v_j = \sum_j u_j v_j$

• Wir haben bereits gesehen (S. 68):

mit φ als Operator wirkt dieser auf $\underline{v} \in V$ wie folgt

$$\varphi(\underline{v}) = \varphi | \underline{v} \rangle = \sum_{e,k} | \underline{e}_e \rangle \underbrace{\langle \underline{e}_e | \varphi | \underline{e}_k \rangle}_{\varphi_{ek}} \underbrace{\langle \underline{e}_k | \underline{v} \rangle}_{v_k} = \Big(\sum_{ek} | \underline{e}_e \rangle \varphi_{ek} \langle \underline{e}_k | \Big) | \underline{v} \rangle$$

"Operatordarst."

und insbesondere auf Basiselement

$$\varphi(\underline{e}_i) = \varphi | \underline{e}_i \rangle = \sum_{e,k} | \underline{e}_e \rangle \varphi_{ek} \underbrace{\langle \underline{e}_k | \underline{e}_i \rangle}_{\delta_{ik}}$$

$$= \sum_e \varphi_{ei} | \underline{e}_e \rangle$$

betrachten wir nun den endlich dimensionalen Fall $\dim V = n$

d.h. ONB $\{\underline{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$.

dann ist φ_{ei} eine $n\times n$ Matrix (Darstellung von φ) mit folgenden Eigenschaften

$$\langle \varphi(\underline{e}_i) | \varphi(\underline{e}_j) \rangle = \sum_{e,k=1}^{n} \varphi_{kj} \varphi_{ei} \underbrace{\langle \underline{e}_k | \underline{e}_e \rangle}_{\delta_{ke}} = \sum_{e=1}^{n} \varphi_{ej} \varphi_{ei}$$

$$= \sum_{e=1}^{n} (\varphi^T)_{je} \varphi_{ei}$$

andererseits φ orthogonal $= \langle \underline{e}_i | \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ $\Big\}$ $\underline{\varphi^T \varphi = \mathbb{1}_n}$

Die Matrixdarst. von φ gehört zur Menge der

__orthogonalen Matrizen__: $\{A : A \text{ reelle } n\times n \text{ Matrix mit } A^T A = \mathbb{1}_n\}$

Diese bilden die Gruppe $O(n)$ und es gilt

$$\det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2 = \det \mathbb{1}_n = 1$$

$\Rightarrow \det A = \pm 1$ (A reell)

Für $+1$ bilden diese die Gruppe $SO(n)$: Drehungen im $\mathbb{R}^n$

Für -1: Drehspiegelungen im $\mathbb{R}^n$, d.h. $O(n)$ zerfällt in 2 Teile!

Def: Die lineare Abb. φ heißt __symmetrisch__ (symmetrischer Operator) wenn gilt

$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in V : \langle \underline{u} | \varphi(\underline{v}) \rangle = \langle \varphi(\underline{u}) | \underline{v} \rangle$$

oder äquivalent auf der ONB $\{\underline{e}_i\}$:

$$\forall_{i,j} \quad \langle \underline{e}_i | \varphi(\underline{e}_j) \rangle = \langle \varphi(\underline{e}_i) | \underline{e}_j \rangle$$

$$\Leftrightarrow \sum_k \langle \underline{e}_i | \underline{e}_k \rangle \varphi_{kj} = \sum_e \varphi_{ei} \langle \underline{e}_e | \underline{e}_j \rangle$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{ij} = \varphi_{ji}$$

d.h. im endl. dim. Fall ist $\varphi = \varphi^T$ eine sym. $n\times n$ Matrix

Eigenschaften von φ symmetrisch:

<u>Def</u>. Wenn es $\underset{\neq 0}{\underline{v}} \in V$, $\lambda \in K = \mathbb{R}$ gibt so daß gilt

$|\varphi(\underline{v})\rangle = \lambda|\underline{v}\rangle$ so heißen λ Eigenwert von φ und $|\underline{v}\rangle$

Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ

(hier $\lambda \in \mathbb{R}$ per definition von V ein $\mathbb{R}$-VR, $\lambda = 0$ ist möglich)

- es gilt daß 2 Eigenvektoren zu 2 verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind: $\underline{u}, \underline{v} \in V$, $|\varphi(\underline{u})\rangle = \lambda|\underline{u}\rangle$, $|\varphi(\underline{v})\rangle = \mu|\underline{v}\rangle$

$$\Rightarrow \lambda\langle\underline{u}|\underline{v}\rangle = \langle\varphi(\underline{u})|\underline{v}\rangle \overset{\varphi\text{ sym}}{=} \langle\underline{u}|\varphi(\underline{v})\rangle = \langle\underline{u}|\underline{v}\rangle\mu$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda-\mu)}_{\neq 0}\langle\underline{u}|\underline{v}\rangle = 0 \Rightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$$

- im <u>endlich dimensionalen Fall</u> (dim $V = n$)

läßt sich die n-dim Matrixdarstellung φ_{kl} durch eine orthogonale Matrix R diagonalisieren: $R \in O(n)$

$$\sum_{\ell j} R^T_{k\ell}\varphi_{\ell j} R_{ji} = D_{ki}$$

mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und λ_i sind die n Eigenwerte

mit <u>normierten</u> Eigenvektoren $\underline{v}_i$: $\varphi\underline{v}_i = \lambda_i\underline{v}_i$, $\|\underline{v}_i\| = 1$

und es gilt $R_{ki} = (\underline{v}_i)_k$ k-te Komponente

Ferner bilden diese Eigenvektoren $\{\underline{v}_i\}$ eine ONB

* dieselben Eigenschaften gelten im unendl. dim Fall für φ <u>sym</u> mit diskreten Eigenwerten λ_i von normierten Eigenvektoren $\underline{v}_i$

$$\boxed{\varphi = \sum_i \lambda_i|\underline{v}_i\rangle\langle\underline{v}_i|}$$ (vgl. S. 109

<u>Spektraldarstellung</u> von φ symmetrisch.

B) Hermitesche Operatoren (= Selbstadjungierte ")

Betrachte VR V über $K = \mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

Def Die lineare Abb $\varphi : \begin{cases} V \to V \\ \underline{u} \to \varphi(\underline{u}) \end{cases}$ heißt unitär

wenn gilt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V \quad \langle \varphi(\underline{u}) | \varphi(\underline{v}) \rangle = \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle$

(oder mit ONB $\{\underline{e}_i\}$: $\forall_{i,j} \; \langle \varphi(\underline{e}_i) | \varphi(\underline{e}_j) \rangle = \delta_{ij} \; (= \langle \underline{e}_i | \underline{e}_j \rangle)$)

• wegen $K = \mathbb{C}$ gilt $\quad |\varphi(\underline{v})\rangle = \sum_j v_j |\underline{e}_j\rangle \quad , \quad v_j = \langle \underline{e}_j | \underline{v} \rangle$

und $\quad \langle \varphi(\underline{v})| = \sum_j v_j^* \langle \underline{e}_j |$

$\Rightarrow$ entsprechend gilt im endlich dimensionalen Fall $\dim V = n$

für die $n \times n$ Matrixdarstellung $\langle \underline{e}_l | \varphi | \underline{e}_k \rangle = \varphi_{lk}$

$$\langle \underline{e}_i | \underline{e}_j \rangle = \langle \varphi(\underline{e}_i) | \varphi(\underline{e}_j) \rangle = \sum_{l,k=1}^{n} \varphi_{kj}^* \varphi_{li} \langle \underline{e}_k | \underline{e}_l \rangle = \sum_{l=1}^{n} \varphi_{lj}^* \varphi_{li} = \delta_{ij}$$

$$\text{bzw} \sum_{l=1}^{n} \varphi^{+}_{jl} \varphi_{li} = \delta_{ij}$$

komplexe Matrizen A mit $A^+ A = \mathbb{1}_n$ heißen unitär und bilden die unitäre Gruppe $U(n)$. Wegen

$1 = \det \mathbb{1}_n = \det A^+ A = (\det A)^* \det A = |\det A|^2$

definieren wir die Untergruppe $SU(n)$ mit $\det A = 1$

Bsp: $SU(2)$: 3 Pauli matrizen, $SU(3)$ 8 Gell-Man matrizen, zB für 3 quarks

Def Die lineare Abb φ heißt hermitesch (hermitescher Operator)

wenn gilt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V \quad \langle \varphi(\underline{u}) | \underline{v} \rangle = \langle \underline{u} | \varphi(\underline{v}) \rangle$

$\Rightarrow$ für die $n \times n$ Matrixdarstellung $\varphi^+_{kj} = \varphi_{kj} \qquad (+ = {}^{*T})$

in endl. dim $V = n$