5.5. Addition von Drehimpulsen [Münster 16, Fließbach VI 38]

Bei vielen Systemen treten mehrere Drehimpulse auf, wie z.B.

- Bahndrehimpuls $\hat{\vec{L}}$ und Spin $\hat{\vec{S}}$, mit Gesamtdrehimpuls $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$
- 2 Teilchen mit eigenem Drehimpuls $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$, mit -"- $\boxed{\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}}$

Um allgemein zu bleiben betrachten wir im Folgenden eine solche Addition von 2 Drehimpulsen $\hat{\vec{J}}^{(1,2)}$, die separat die Drehimpulsalgebra erfüllen und unabhängig sind: $\boxed{[\hat{J}^{(1)}_i, \hat{J}^{(2)}_k] = \hat{0} \quad \forall i,k.}$

* Aufgrund der Algebren von $\hat{\vec{J}}, \hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ gibt es 2 Möglichkeiten für die Wahl von möglichst vielen, vertauschenden Operatoren:
(ob diese dann auch mit $\hat{H}$ vertauschen muß im Einzelfall geprüft werden)

(1) $(\hat{\vec{J}}^{(1)})^2, \hat{J}^{(1)}_3, (\hat{\vec{J}}^{(2)})^2, \hat{J}^{(2)}_3$: wegen der Unabhängigkeit, s.o.

Die gemeinsamen Eigenzustände nennen wir $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$
und offensichtlich faktorisiert diese Basis $\equiv \otimes$

(2) $\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_3, (\hat{\vec{J}}^{(1)})^2, (\hat{\vec{J}}^{(2)})^2$: weil $[\hat{J}_k, (\hat{\vec{J}}^{(1)})^2] = [\hat{J}^{(1)}_k + \hat{J}^{(2)}_k, (\hat{\vec{J}}^{(1)})^2] = \hat{0}$

und genauso $[\hat{J}_k, (\hat{\vec{J}}^{(2)})^2] = \hat{0}$.

$\rightarrow$ wir charakterisieren diese Basis durch die Eigenwerte von $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_3$:

$\hat{\vec{J}}^2 |J, M; j_1 j_2\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J, M; j_1 j_2\rangle$ und $\hat{J}_3 |J, M; j_1 j_2\rangle = \hbar M |J, M; j_1, j_2\rangle$

$\Rightarrow$ **Basiswechsel** gegeben durch $|J, M; \overbrace{j_1, j_2}^{\text{wird manchmal weggelassen}}\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | J, M; j_1 j_2\rangle$

da j_1, j_2 gegeben müssen wir hier nur über die $m_{1,2}$ summieren.

→ Bestimmung der Übergangsamplituden $\langle j_1,m_1; j_2,m_2 | J,M; j_1,j_2\rangle$

- diese heißen Clebsch - Gordan Koeffizienten.

* Welche Werte von J und M sind zu gegebenen $j_1 \geq 0$ und $j_2 \geq 0$ möglich?

⇒ in der Basis $|j_1,m_1; j_2,m_2\rangle$ gibt es $(2j_1+1)\cdot(2j_2+1)$ Zustände

⇒ dieselbe Dimension hat $|J,M; j_1,j_2\rangle$. Es gilt:

- $\hat{J}_3 = \hat{J}_3^{(1)} + \hat{J}_3^{(2)} \Rightarrow \boxed{M = m_1 + m_2}$

  da Eigenzustände $\hat{J}_3 |j_1,m_1; j_2,m_2\rangle = \hbar\underbrace{(m_1+m_2)}_{M} |j_1,m_1; j_2,m_2\rangle$

- $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ und $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$:

$\Leftrightarrow -j_1 \leq M - m_2 \leq j_1$ und $-j_2 \leq M - m_1 \leq j_2$

wähle $M = J$ und $m_2 = j_2$ max, und wähle $M = J$ und $m_1 = j_1$ max

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{-j_1 \leq J - j_2 \leq j_1 \qquad -j_2 \leq J - j_1 \leq j_2} \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow j_2 - j_1 \leq J \leq j_1 + j_2$ und $j_1 - j_2 \leq J \leq j_1 + j_2$

$\Rightarrow \boxed{|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2}$ möglicher Wertebereich von J

Gesamtdrehimpuls

- die Quantenzahlen m_1 und m_2 wachsen in Einheiten von +1.
  (von $\{-j_1, -j_1+1, \ldots, +j_1\}$ bzw. $\{-j_2, -j_2+1, \ldots, +j_2\}$) ⇒ die Quantenzahl

$M = m_1 + m_2$ wächst in Einheiten von +1. D.h. alle J müssen entweder ganz- oder halbzahlig sein: $\boxed{J \in \{|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2\}}$

ist der Wertebereich von J.

Stimmt die so erhaltene Dim. der Basen überein?

- zu gegebenem J gibt es $2J+1$ Zustände: $M=-J, -J+1, \ldots, J-1, J$, da $\hat{\vec{J}}$ ein Drehimpuls ist. Daraus ergibt sich die Gesamtzahl der Zustände wie folgt: wähle OBdA $j_1 \geq j_2$

$$\underline{\dim(\text{Basis})} = \underline{\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J+1)} = \sum_{J=1}^{j_1+j_2} (2J+1) - \sum_{J=1}^{j_1-j_2-1} (2J+1) =$$

wobei $\sum_{i=1}^{n} = n$, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= 2\frac{(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)}{2} + j_1+j_2$$

$$-\left(2\frac{(j_1-j_2-1)(j_1-j_2)}{2} + j_1-j_2-1\right)$$

$$= j_1^2+2j_1j_2+j_2^2+2(j_1+j_2)-(j_1^2-2j_1j_2+j_2^2)+1$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1) \quad \checkmark$$

* Insbesondere sehen wir, daß die verschiedenen J-Werte nicht entartet sind und genau einmal vorkommen.

- Clebsch-Gordon-Koeffizienten:

- für allgemeine Drehimpuls op. und deren Auf- und Absteige op. gilt (s. S. 88).

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_\pm |j,m\rangle &= C_\pm(j,m)\,|j,m\pm1\rangle \\ \text{mit}\quad C_\pm(j,m) &= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

wobei hier $\hat{\vec{J}}^{(1)}$, $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ oder $\hat{\vec{J}}$ gemeint sein kann.

Schritte zur Bestimmung: wir beginnen mit $|J, M=J, j_1, j_2\rangle$, dem höchsten M

a) wegen $\underset{=J}{M=m_1+m_2}$ gilt $\boxed{|J,J,j_1,j_2\rangle = \sum_n a_n |j_1, \underset{j_1-n}{m_1}; j_2, \underset{J-j_1+n}{m_2}\rangle}$

wobei die Summe über n alle die Werte $n = \{0, 1, \ldots\}$ annimmt, die $-j_1 \leq m_1 = j_1 - n \leq +j_1$ und $-j_2 \leq J - j_1 + n \leq j_2$ erfüllen, s. (A) S. 103

Die „a_n" sind die C.-G. Koeff.

b) wir wenden $\hat{J}_+ = \hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)}$ auf $|J, J; j_1, j_2\rangle$ an.

$\Rightarrow$ einerseits ergibt dies 0, wegen $M = J$, andererseits benutzen wir (*)

auf der rechten Seite, sowie $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$

$$\Rightarrow 0 = \hat{J}_+ |JJ; j_1 j_2\rangle = \sum_n a_n \left(C_+(j_1, m_1) |j_1, \underbrace{m_1+1}_{j_1+1-n}\rangle |j_2 m_2\rangle + C_+(j_2 m_2) |j_1 m_1\rangle |j_2, \underbrace{m_2+1}_{J-j_1+1-n}\rangle \right)$$

$\Rightarrow$ c) wir erhalten homogene Gleichungen für die a_n

d) aufgrund der Normierung (von $|JJ, j_1 j_2\rangle$) muß gelten $\sum_n |a_n|^2 = 1$

e) Wir müßen eine Phasenkonvention wählen, z. B. Condon-Shortley $a_0 > 0$, $\in \mathbb{R}$

f) $|J, M = J-1, j_1, j_2\rangle$ erhalten wir durch Anwendung von

$\hat{J}_- = \hat{J}_-^{(1)} + J_-^{(2)}$, usw.

* Beispiel: $j_1 = 2, j_2 = 3$ gegeben $\Rightarrow J \in \{ |j_1 - j_2| = 1, 2, 3, 4, 5 = j_1 + j_2 \}$

wir betrachten $J = 3$:

$$|J=3, M=3; j_1=2, j_2=3\rangle = \sum_{n=0} a_n |j_1 = 2, j_1 - n\rangle |j_2 = 3, J - j_1 + n\rangle$$

erlaubte Werte: $-j_1 = -2 \leq m_1 = j_1 - n = 2 - n \leq 2 = j_1$ und $-j_2 = -3 \leq J - j_1 + n = 3 - 2 + n \leq j_2 = 3$

$\Rightarrow n = 0, 1, 2$, d.h.

$$\hat{J}_+ \cdot \Big| \boxed{|3,3;2,3\rangle = a_0 |2,2\rangle |3,1\rangle + a_1 |2,1\rangle |3,2\rangle + a_2 |2,0\rangle |3,3\rangle} \quad (*)$$

$$\Rightarrow 0 = a_0 \big(\underbrace{\hat{J}_+^{(1)}}_{0} + \hat{J}_+^{(2)}\big) |2,2\rangle |3,1\rangle + a_1 \big(\hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)}\big) |2,1\rangle |3,2\rangle + a_2 \big(\hat{J}_+^{(1)} + \underbrace{\hat{J}_+^{(2)}}_{0}\big) |2,0\rangle |3,3\rangle$$

$$= \hbar \Big\{ a_0 \sqrt{2 \cdot 5}\, |2,2\rangle |3,2\rangle + a_1 \sqrt{1 \cdot 4}\, |2,2\rangle |3,2\rangle + a_1 \sqrt{1 \cdot 6}\, |2,1\rangle |3,3\rangle$$
$$+ a_2 \sqrt{2 \cdot 3}\, |2,1\rangle |3,3\rangle \Big\}$$

mit $C_+(j, m) = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$

da $|2,2\rangle|3,2\rangle$ und $|2,1\rangle|3,3\rangle$ unabhängig sind, muss gelten

$$0 = \sqrt{10}\, a_0 + \sqrt{4}\, a_1 \quad \text{und} \quad 0 = \sqrt{6}\, a_1 + \sqrt{6}\, a_2$$

d.h. $a_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}\, a_0 \,, \quad a_2 = -a_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}\, a_0$

<u>Normierung:</u> $1 = \langle 3,3;2,3|3,3;2,3\rangle \overset{\text{orthogonal}}{=} |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2$

$$\Leftrightarrow 1 = |a_0|^2\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \underline{|a_0| = \frac{1}{\sqrt{6}}}\,, \quad \text{Phasenkonvention } a_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$\boxed{a_0 = +\frac{1}{\sqrt{6}}\,, \quad a_1 = -\sqrt{\frac{5}{12}}\,, \quad a_2 = +\sqrt{\frac{5}{12}}}$$

- im nächsten Schritt erhalten wir mit $\hat{J}_- = \hat{J}_-^{(1)} - \hat{J}_-^{(2)}$ angewendet auf $(**)$

$$C_-(3,3)\, |\overset{J,J-1}{\overbrace{3,2}}; 2,3\rangle = a_0\big(C_-(2,2)|2,1\rangle|3,1\rangle + C_-(3,1)|2,2\rangle|3,0\rangle\big)$$
$$+ a_1\big(C_-(2,1)|2,0\rangle|3,2\rangle + C_-(3,2)|2,1\rangle|3,1\rangle\big)$$
$$+ a_2\big(C_-(2,0)|2,-1\rangle|3,3\rangle + C_-(3,3)|2,0\rangle|3,2\rangle\big)$$

mit $C_-(j,m) = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$ usw.

In der Praxis findet man <u>Clebsch-Gordan-Koeffizienten in Tabellen</u> (s. Website). Manchmal werden diese auch durch <u>3j-Symbole</u> ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J, -M, j_1, j_2\rangle$$

wird oft weggelassen

36. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

	J	J	...
	M	M	...
m_1 m_2	Coefficients		
m_1 m_2			
⋮ ⋮			

1/2×1/2

m_1 m_2	J=1, M=+1
+1/2 +1/2	1

m_1 m_2	J=1, M=0	J=0, M=0
+1/2 −1/2	1/2	1/2
−1/2 +1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=1, M=−1
−1/2 −1/2	1

1×1/2

m_1 m_2	J=3/2, M=+3/2
+1 +1/2	1

m_1 m_2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+1 −1/2	1/3	2/3
0 +1/2	2/3	−1/3

m_1 m_2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
0 −1/2	2/3	1/3
−1 +1/2	1/3	−2/3

m_1 m_2	J=3/2, M=−3/2
−1 −1/2	1

2×1

m_1 m_2	J=3, M=+3
+2 +1	1

m_1 m_2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+2 0	1/3	2/3
+1 +1	2/3	−1/3

m_1 m_2	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+2 −1	1/15	1/3	3/5
+1 0	8/15	1/6	−3/10
0 +1	2/5	−1/2	1/10

m_1 m_2	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0
+1 −1	1/5	1/2	3/10
0 0	3/5	0	−2/5
−1 +1	1/5	−1/2	3/10

m_1 m_2	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0 −1	2/5	1/2	1/10
−1 0	8/15	−1/6	−3/10
−2 +1	1/15	−1/3	3/5

m_1 m_2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
−1 −1	2/3	1/3
−2 0	1/3	−2/3

m_1 m_2	J=3, M=−3
−2 −1	1

1×1

m_1 m_2	J=2, M=+2
+1 +1	1

m_1 m_2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+1 0	1/2	1/2
0 +1	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+1 −1	1/6	1/2	1/3
0 0	2/3	0	−1/3
−1 +1	1/6	−1/2	1/3

m_1 m_2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0 −1	1/2	1/2
−1 0	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=2, M=−2
−1 −1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

2×1/2

m_1 m_2	J=5/2, M=+5/2
+2 +1/2	1

m_1 m_2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+2 −1/2	1/5	4/5
+1 +1/2	4/5	−1/5

m_1 m_2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2
+1 −1/2	2/5	3/5
0 +1/2	3/5	−2/5

m_1 m_2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2
0 −1/2	3/5	2/5
−1 +1/2	2/5	−3/5

m_1 m_2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1 −1/2	4/5	1/5
−2 +1/2	1/5	−4/5

m_1 m_2	J=5/2, M=−5/2
−2 −1/2	1

3/2×1/2

m_1 m_2	J=2, M=+2
+3/2 +1/2	1

m_1 m_2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+3/2 −1/2	1/4	3/4
+1/2 +1/2	3/4	−1/4

m_1 m_2	J=2, M=0	J=1, M=0
+1/2 −1/2	1/2	1/2
−1/2 +1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
−1/2 −1/2	3/4	1/4
−3/2 +1/2	1/4	−3/4

m_1 m_2	J=2, M=−2
−3/2 −1/2	1

3/2×1

m_1 m_2	J=5/2, M=+5/2
+3/2 +1	1

m_1 m_2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+3/2 0	2/5	3/5
+1/2 +1	3/5	−2/5

m_1 m_2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+3/2 −1	1/10	2/5	1/2
+1/2 0	3/5	1/15	−1/3
−1/2 +1	3/10	−8/15	1/6

m_1 m_2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
+1/2 −1	3/10	8/15	1/6
−1/2 0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2 +1	1/10	−2/5	1/2

m_1 m_2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1/2 −1	3/5	2/5
−3/2 0	2/5	−3/5

m_1 m_2	J=5/2, M=−5/2
−3/2 −1	1

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

2×3/2

m_1 m_2	J=7/2, M=+7/2
+2 +3/2	1

m_1 m_2	J=7/2, M=+5/2	J=5/2, M=+5/2
+2 +1/2	3/7	4/7
+1 +3/2	4/7	−3/7

m_1 m_2	J=7/2, M=+3/2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+2 −1/2	1/7	16/35	2/5
+1 +1/2	4/7	1/35	−2/5
0 +3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1 m_2	J=7/2, M=+1/2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+2 −3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1 −1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0 +1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1 +3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1 m_2	J=7/2, M=−1/2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
+1 −3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0 −1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1 +1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2 +3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1 m_2	J=7/2, M=−3/2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
0 −3/2	2/7	18/35	1/5
−1 −1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2 +1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1 m_2	J=7/2, M=−5/2	J=5/2, M=−5/2
−1 −3/2	4/7	3/7
−2 −1/2	3/7	−4/7

m_1 m_2	J=7/2, M=−7/2
−2 −3/2	1

3/2×3/2

m_1 m_2	J=3, M=+3
+3/2 +3/2	1

m_1 m_2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+3/2 +1/2	1/2	1/2
+1/2 +3/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+3/2 −1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2 +1/2	3/5	0	−2/5
−1/2 +3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1 m_2	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+3/2 −3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2 −1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2 +1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2 +3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1 m_2	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
+1/2 −3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2 −1/2	3/5	0	−2/5
−3/2 +1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1 m_2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
−1/2 −3/2	1/2	1/2
−3/2 −1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=3, M=−3
−3/2 −3/2	1

2×2

m_1 m_2	J=4, M=+4
+2 +2	1

m_1 m_2	J=4, M=+3	J=3, M=+3
+2 +1	1/2	1/2
+1 +2	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=4, M=+2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+2 0	3/14	1/2	2/7
+1 +1	4/7	0	−3/7
0 +2	3/14	−1/2	2/7

m_1 m_2	J=4, M=+1	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+2 −1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1 0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0 +1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1 +2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1 m_2	J=4, M=0	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+2 −2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1 −1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0 0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1 +1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2 +2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1 m_2	J=4, M=−1	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
+1 −2	1/14	3/10	3/7	1/5
0 −1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1 0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2 +1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1 m_2	J=4, M=−2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
0 −2	3/14	1/2	2/7
−1 −1	4/7	0	−3/7
−2 0	3/14	−1/2	2/7

m_1 m_2	J=4, M=−3	J=3, M=−3
−1 −2	1/2	1/2
−2 −1	1/2	−1/2

m_1 m_2	J=4, M=−4
−2 −2	1

$$d^1_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2 \qquad d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1) \qquad d^2_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 36.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).