−2 min

III.4. Legendre Polynome : Bsp. für klassische orthogonale Polynome

Def: $$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell \,, \quad x\in[-1,1] \quad \text{f. } \ell=0,1,\dots$$ Rodrigues Formel

wobei $P_0(x)=1$

Diese Erfüllen folgende Differentialgl.

$$\Big\{\underbrace{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}}_{L} + \underbrace{\ell(\ell+1)}_{-\lambda_\ell}\Big\} P_\ell(x) = 0$$

Dies ist eine Eigenwertgl. des symmetrischen Diff.op. 2. Ordnung L

mit $p_0(x)=(1-x^2)$, $p_1(x)=-2x=p_0'(x)$, $p_2(x)=0$ (+ Randbed.)

und $w(x)=1$ auf $[a,b]=[-1,1]$ (s. S. 117, S. 114-115)

mit Eigenwerten zu $\hat{L} = -\frac{1}{w}L = -L$ $\quad \lambda_\ell = \ell(\ell+1)$.

- die $P_\ell(x)$ sind Polynome vom Grad ℓ ($2\ell-\ell$ Ableitungen)

  z.B. $P_{\ell=0}(x) = 1$, $P_1(x) = \frac{1}{2}2x = x$ usw

- Wir zeigen nun, daß diese orthogonal sind (nicht normiert ≠ orthonormal aus historischen Gründen)

  bzgl. $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, g(x)$ auf IR-VR.

da dieses symmetrisch ist bzgl. f und g betrachte oBdA $\ell > m \geq 0$

$$\langle P_\ell|P_m\rangle = \frac{1}{2^\ell \ell!\, 2^m m!}\int_{-1}^{1} dx \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell\right]\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2-1)^m\right]$$ partielle Int.

$$= \frac{1}{2^{\ell+m}\ell!\, m!}\left\{ \underbrace{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}(x^2-1)^\ell\right]_{-1}^{+1}} - \int_{-1}^{1} dx \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell-1}(x^2-1)^\ell\right]\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}(x^2-1)^m\right]\right\}$$

ergibt 0 da mindestens 1 Faktor (x^2-1) nach Abl. übrig bleibt. Iteration ergibt

$$\Rightarrow \langle P_l | P_m \rangle = \frac{1}{2^{l+m} l! m!} (-1)^l \int_{-1}^{1} dx (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (x^2-1)^m = 0$$

da $(x^2-1)^m$ vom Grad $2m$ und wir $l+m > 2m$ mal Ableiten.

$\underline{(\text{Norm})^2}$: $\underline{l=0}$: $\langle P_0 | P_0 \rangle = 1 \cdot \int_{-1}^{1} dx\, 1 = x\big|_{-1}^{1} = 2$

$\underline{l \geq 1}$: $\langle P_l | P_l \rangle = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} (-)^l \int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} \underbrace{(x^2-1)^l}$

wie oben

nur Ordnung x^{2l} trägt bei in $\sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} (x^2)^n (-1)^{l-n}$

$$= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} (-1)^l (2l)! \int_{-1}^{1} dx (x^2-1)^l$$

Löse Integral durch partielle Integration

$$\int_{-1}^{1} dx\, (x-1)^l (x+1)^l = \underbrace{(x-1)^l \frac{(x+1)^{l+1}}{l+1}\bigg|_{-1}^{1}}_{0} - \int_{-1}^{1} dx\, l (x-1)^{l-1} \frac{(x+1)^{l+1}}{l+1}$$

$$= \ldots = (-)^l \frac{l!}{(l+1)(l+2)\ldots(2l)} \int_{-1}^{1} dx\, 1 \cdot (x+1)^{2l}$$

$l \geq 1$

$$= \frac{(-1)^l (l!)^2}{(2l)!} \underbrace{\frac{1}{2l+1} (x+1)^{2l+1} \bigg|_{-1}^{1}}_{\frac{2^{2l+1}}{2l+1} - 0 \;\; \pm 0 \text{ hier}}$$

$\Rightarrow \langle P_l | P_l \rangle = \frac{2}{2l+1}$, d.h. die orthonormalen Polynome $\tilde{P}_n(x)$

sind gegeben durch $\tilde{P}_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\, P_l(x)$

Eigenschaften von $P_\ell(x)$:

- $P_\ell(1) = 1 \quad \forall \ell = 0, 1 \dots$ $\qquad \ell = 0 \ \checkmark$

$\ell \geq 1: \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell \Big|_{x=1} = \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x-1)^\ell (x+1)^\ell \Big|_{x=1} = \ell! \, 2^\ell$

damit etwas $\neq 0$ übrig muß Abl. nur auf 1. Faktor

$\Rightarrow P_\ell(1) = \frac{\ell! \, 2^\ell}{2^\ell \ell!} = 1$

- $\underline{P_\ell(-x) = (-)^\ell P_\ell(x)}$: denn $P_\ell(x)$ ist ℓ-te Ableitung des geraden Polynoms $(x^2-1)^\ell$

$\Rightarrow \underline{P_\ell(-1)} = (-1)^\ell P_\ell(1) = \underline{(-1)^\ell}$

* Es bleibt zu zeigen, daß die $P_\ell(x)$ wie behauptet die Legendresche DGL $\left\{\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \ell(\ell+1)\right\} P_\ell(x) \overset{!}{=} 0$ löse ......

betrachte $\underline{f(x) = (x^2-1)^\ell}$, d.h. $\underline{P_\ell(x)} = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell f(x) = \underline{\frac{1}{2^\ell \ell!} f^{(\ell)}(x)}$

$\rightarrow$ wir brauchen $-(x^2-1) f^{(\ell+1)}(x)$ in .... und davon die Ableitung

$\underline{\text{es gilt}}: \quad \underline{(x^2-1) f^{(1)}(x)} = (x^2-1)\,\ell\,(x^2-1)^{\ell-1} \cdot 2x = \underline{2x\ell f(x)}$

davon die $\underline{1 \text{ Abl}}$: $\quad (x^2-1) f^{(2)}(x) + 2x f^{(1)}(x) = 2x\ell f^{(1)}(x) + 2\ell f^{(0)}(x)$

$\underline{2 \text{ Abl}}$ $\quad (x^2-1) f^{(3)} + 2 \cdot 2x f^{(2)} + 2 f^{(1)} = 2x\ell f^{(2)} + 2 \cdot 2\ell f^{(1)}$

$\underline{3. \text{ Abl}}$ $\quad (x^2-1) f^{(4)} + 3 \cdot 2x f^{(3)} + 2 \cdot 3 f^{(2)} = 2x\ell f^{(3)} + 2\ell \cdot 3 f^{(2)}$ bleibt

$\underline{\text{Induktion}}$

$\Rightarrow (n+1)$ mal Abl.: $\quad (x^2-1) f^{(n+2)} + 2x(n+1) f^{(n+1)} + n(n+1) f^{(n)} = 2x\ell f^{(n+1)} + 2\ell(n+1) f^{(n)}$

wähle n=l:

$$\Rightarrow \quad (x^2-1) f^{(l+2)} + 2x f^{(l+1)} = l(l+1) f^{(l)} \qquad *$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{d}{dx}\left[(1-x^2) f^{(l+1)}\right] = l(l+1) f^{(l)} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2^l l!}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\underbrace{\frac{1}{2^l l!} f^{(l)}}_{P_l(x)}\right] = l(l+1)\underbrace{\frac{1}{2^l l!} f^{(l)}}_{P_l(x)} \qquad \checkmark$$

∃ Rekursionsbez.:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}P_n(x) = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x))$$

* diese und weitere Beziehungen (erzeugendes Funkt., Rodrigues Formel) gelten für eine ganze Reihe von klassischen orthogonalen Polynomen: Hermiten, Laguerren, etc.

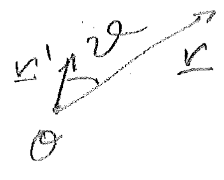
* man kann zeigen, daß es folgendes erzeugende Funktional $\phi(t,x)$ gibt:

$$\boxed{\phi(t,x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, t^l} \quad , \text{ mit } \quad P_l(x) = \frac{1}{l!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l \phi(x,t)\Big|_{t=0} \quad \text{Taylorkoeff.}$$

$$= (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in [-1,1]$$

*Wo landen Legendre Polynome bzw. deren Diff. Gl. auf in der Physik?

elektrostatisches Potential $\Phi(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$
einer Punktladung bei $\underline{r}'$
in 3 Dimensionen am Ort $\underline{r}$



Φ ist Lösung der 3D Laplacegl. $\Delta_r \Phi(\underline{r},\underline{r}')=0$ $(=\Delta_{r'}\Phi(\underline{r},\underline{r}')$ da symmetrisch in $\underline{r},\underline{r}'$)
$(\underline{r}\neq\underline{r}')$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \left(\underline{r}^2 + \underline{r}'^2 - 2\underline{r}\cdot\underline{r}'\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

mit $r = |\underline{r}|,\ r' = |\underline{r}'|$ $\qquad = \frac{1}{r}\left(1+t^2-2tx\right)^{-\frac{1}{2}}$

und $t = \frac{r'}{r}$, oBdA < 1 $\qquad = \frac{1}{r}\,\phi(x,t) = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(x)$

$x = \cos\vartheta \in [-1,1]$, $\quad 1-x^2 = \sin^2\vartheta$

Laplace operator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta_{\underline{r}} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta \sin\vartheta\,\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2$$

mit $x = \cos\vartheta \Rightarrow \partial_\vartheta f(\cos\vartheta = x) = -\sin\vartheta\,\partial_x f(x)$, d.h. $\partial_x = \frac{-1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta$

$$\Rightarrow \Delta_{\underline{r}} = \underbrace{\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r}_{\frac{1}{r}\partial_r^2 r} + \frac{1}{r^2}\partial_x(1-x^2)\partial_x + \frac{1}{r^2(1-x^2)}\partial_\varphi^2$$

da Φ nicht von φ abhängt gilt Folgendes

$$\Delta_r\,\Phi(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{r}\partial_r^2(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\partial_x\left((1-x^2)\partial_x\Phi\right) = 0$$

(**) $\Leftrightarrow$ $\underline{0 = \frac{1}{r}\partial_r^2\phi + \frac{1}{r^3}\partial_x\left((1-x^2)\partial_x\phi\right)}$, r, x unabh. $\cdot r^3$

: $\phi = \phi(x,t)$, mit $t = \frac{r'}{r}$, in $\sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(x)$:

$$\Rightarrow r^2\partial_r^2 t^\ell = r^2\partial_r^2\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell = -r^2\partial_r \ell\frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} = +r^2\ell(\ell+1)\frac{r'^\ell}{r^{\ell+2}} = \ell(\ell+1)t^\ell$$

d.h. (**) ist äquivalent zur

$$0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell\left\{\overbrace{\ell(\ell+1)P_\ell(x) + \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell(x)}^{\text{Legendresche Dgl}}\right\}$$

dies ist erfüllt wenn $P_\ell(x)$ das Legendre Polynom ist.