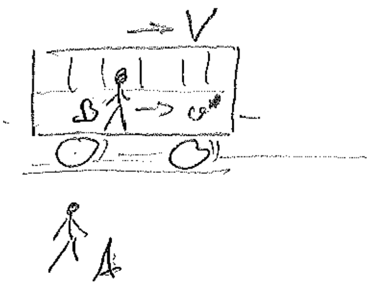
Teil II 9. Einführung in die spezielle Relativitätstheorie

Literatur: David J. Griffiths, "Elektrodynamik", Kapitel 12
L.D. Landau, E.M. Lifschitz, "Klassische Feldtheorie", Kapitel 1

Motivation: Addition von Geschwindigkeiten

Betrachte: einen Bahnwaggon, der sich mit $V = 100\,km/h$ relativ zur ruhenden Person A bewegt, und Person B, die sich mit $v' = 5\,km/h$ relativ zum Wagon in Fahrtrichtung bewegt.



⇒ Relativgeschwindigkeit von B zu A.

- Galileische Additionsregel $\boxed{v = V + v'} = 105\,km/h$

Frage: gilt das auch, wenn sich A sehr viel schneller bewegt?

Nein: Einsteinsche A. $\boxed{v = \dfrac{V + v'}{1 + \frac{V v'}{c^2}}} \approx (V+v')\left(1 - \frac{V v'}{c^2} + \ldots\right)$ für $V, v' \ll c$

das folgt aus der speziellen Relativitätstheorie.

Mit $c \approx 10^9\,km/h \left(\frac{1}{300.000\,km/s}\right)$ sind die Korrekturen zur klass. Mechanik von Galilei extrem klein!

9.1. Das Relativitätsprinzip

Hierzu müssen wir einige Begriffe definieren. Ein Bezugssystem ist ein kartesisches Koordinatensystem mit synchronisierten Uhren an jedem Raumpunkt. D.h. jedem Ereignis in einem Bezugssystem lassen sich eindeutig ein Zeitpunkt t und 3 kartesische Raumkoordinaten zuordnen.

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem sich Körper ohne Wechselwirkung mit anderen Körpern gleichförmig und geradlinig bewegen.

* Wir nehmen an, daß es ein solches Inertialsystem gibt.
Aus der Def folgt, daß jedes Bezugssystem, das sich gegenüber einem Inertialsystem gleichförmig und geradlinig bewegt, auch ein Inertialsystem ist.

1. Das (Einsteinsche) Relativitätsprinzip.

   Die physikalischen Gesetze gelten gleichermaßen in allen Inertialsystemen.

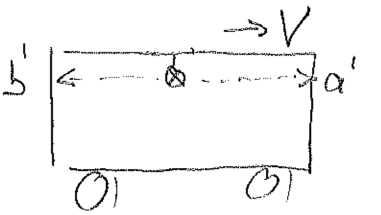
2. Die Universalität der Lichtgeschwindigkeit

   Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich c, d.h. unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle zum Beobachter in einem solchen Inertialsystem.

* In der Speziellen Relativitätstheorie wird zusätzlich angenommen, daß der Raum homogen, isotrop und euklidisch ist, d.h. es gelten die Gesetze der euklidischen Geometrie (Winkelsumme im Dreieck $= 180°$ usw.)
In der allgemeinen RT ist das nicht mehr so, schwere Körper krümmen den Raum um sich durch ihre Gravitation, usw. Wir betrachten im Folgenden keine gravitationellen WW und beschränken uns auf die Spezielle Relativitätstheorie.

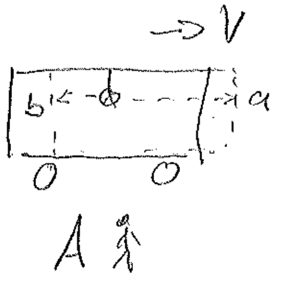
* Konsequenzen aus Prinzipien 1) und 2) [Griffiths 12.1.2]

i) Relativität der Gleichzeitigkeit



- in der Mitte des Wagons von Person B (die nun ruht) wird eine Lampe angeschaltet.

⇒ Aus Sicht von B erreicht das Licht gleichzeitig die Vorder- und Rückseite des Wagons, d.h. Ereignis a' und b' sind für B gleichzeitig



- für Person A sehen die Ereignisse wie folgt aus: das Licht, das im mit Geschwindigkeit V fahrenden Wagon angeschaltet wird, breitet sich in alle Richtungen mit c aus.

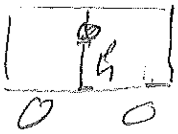
[durch Einstein's Additionsregel $v_{Licht} = \frac{(V+c)}{\left(1+\frac{Vc}{c^2}\right)}\cdot\frac{c}{c} = c$ ✓]

Allerdings bewegt die Wagonrückwand sich auf die Lichtquelle zu, d.h. das <u>Ereignis b</u> daß das Licht auf diese trifft, findet <u>vor</u> dem <u>Ereignis a</u> statt, daß das Licht auf die Vorderwand trifft. D.h. für Person A sind diese Ereignisse <u>nicht mehr gleichzeitig</u>.

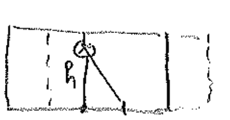
$\Rightarrow$ Zwei Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig stattfinden, sind in einem dazu bewegten anderen Inertialsystem i.A. nicht mehr gleichzeitig!

ii) Zeitdilatation

Betrachten wir nun die Zeit, die das Licht braucht, um im System von Person B den Wagonboden senkrecht unter der Lampe zu erreichen $ct_B = h \Leftrightarrow \underline{t_B = \frac{h}{c}}$, wobei h = Höhe d. Lampe.



Nun zum Inertialsystem von Person A:
Hier legt der Wagonmittelpunkt am Boden bis zum Auftreffen die Strecke $V\cdot t_A$ zurück, d.h. das Licht muß die Strecke* $\sqrt{h^2+(Vt_A)^2} = ct_A$ in der Zeit t_A zurücklegen $\Rightarrow h^2+V^2t_A^2 = c^2t_A^2 \Leftrightarrow \boxed{t_A = \frac{h}{\sqrt{c^2-V^2}}} = \underbrace{\frac{h}{c}}_{=t_B}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \boxed{t_B\gamma}$



*wir benutzen Euklid für ein rechtwinkliges Dreieck

$\Rightarrow$ wegen $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

gilt $t_A > t_B$, d.h. die Uhr im mit V bewegten System geht langsamer, da dort weniger Zeit vergeht

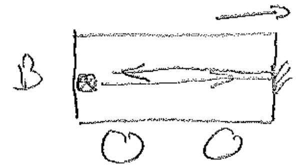
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{bewegte Uhren gehen langsamer}}$

<u>Bsp</u>: Lebensdauer des μ:

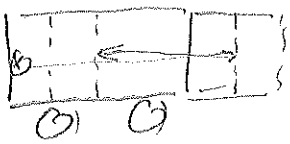
- im Labor beträgt die Lebensdauer eines ruhenden Muons μ im Durchschnitt $2 \cdot 10^{-6}$ s.
- in der Atmosphäre werden durch Stöße (der kosm. Strahlung) hochenergetische μ's erzeugt. Wenn ein solches μ sich z.B. mit $V = \frac{3}{5}c$ durch unser Laborsystem bewegt, verlängert sich (von uns im Labor aus gesehen) seine Lebensdauer um $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{9}{25})}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, auf in diesem Fall $2 \cdot \frac{5}{4} 10^{-6}\,s = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,s$

Dieser Effekt lässt sich experimentell beobachten.

vii) Lorentz-Kontraktion



Wir schalten nun am Wagenende eine Lampe an, das Licht wird an einem Spiegel am Wagenanfang reflektiert und wir messen im Wagensystem von Person B die Zeit, bis das Licht wieder am Wagenende ankommt: $ct'_B = 2x'_B$ wobei x'_B die Wagenlänge ist, die B vorher gemessen hat.



Für Person A ist der Ablauf komplizierter.

• für den Hinweg ist der Weg zum Spiegel $x_A + Vt_1 = ct_1$

und für den Rückweg $x_A - Vt_2 = ct_2$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{x_A}{c-V}, \quad t_2 = \frac{x_A}{c+V} \Rightarrow t_A = t_1 + t_2 = \frac{x_A(c+V) + x_A(c-V)}{c^2 - V^2} = \frac{2x_A}{c}\frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}$$

nun wissen wir aus ii)

daß $t_A = t'_B\gamma = t'_B\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{x_A}{c}\frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)} = \frac{2x'_B}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \boxed{x_A\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = x'_B}$$

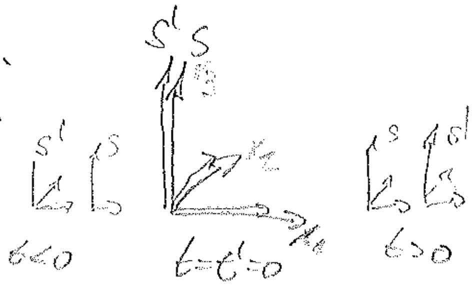
$x_A <$

d.h. die so von A bestimmte Waggonlänge x_A ist kürzer als die von B gemessene x'_B

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{bewegte Objekte erscheinen verkürzt}}$

9.2 Lorentztransformationen [Griffiths 12.1.3]

Gegeben seien 2 Inertialsysteme S und S', wobei S' sich relativ zu S mit Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß Koordinatenursprünge $\vec{x} = \vec{0}$ zu $t=0$ und $\vec{x}' = \vec{0}$ zu $t'=0$ zusammenfallen.



$\vec{e}_1 V = \vec{V}$ ->

Frage: Wie hängen $t, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $t', \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ zusammen?

Der Zusammenhang zwischen $t, \vec{x}$ und $t', \vec{x}'$ muß linear sein.
Denn S, S' sind Inertialsysteme, und jede geradlinige, gleichförmige Bewegung bzgl. S muß dies auch bzgl. S' sein.