• für den Hinweg ist der Weg zum Spiegel $x_A + Vt_1 = ct_1$
und für den Rückweg $x_A - Vt_2 = ct_2$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{x_A}{c-V}, \quad t_2 = \frac{x_A}{c+V} \Rightarrow t_A = t_1 + t_2 = \frac{x_A(c+V) + x_A(c-V)}{c^2 - V^2} = \frac{2x_A}{c}\frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}$$

nun wissen wir aus ii)

daß $t_A = t_B'\gamma = t_B' \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

$$\Rightarrow 2\frac{x_A}{c}\frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)} = \frac{2x_B'}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \boxed{x_A \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = x_B'}$$

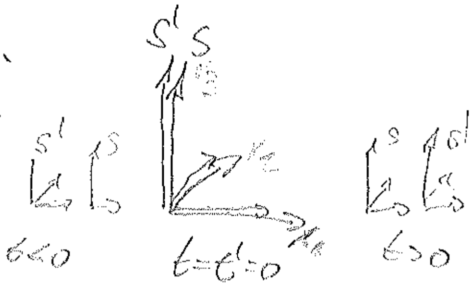
x_A

d.h. die so von A bestimmte Waggonlänge x_A ist kürzer als die von B gemessene x_B'

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{bewegte Objekte erscheinen verkürzt}}$

9.2 Lorentztransformationen [Griffiths 12.1.3]

Gegeben seien 2 Inertialsysteme S und S', wobei S' sich relativ zu S mit Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß Koordinatenursprünge $\vec{x} = \vec{0}$ zu $t=0$ und $\vec{x}' = \vec{0}$ zu $t'=0$ zusammenfallen.



$\vec{e}_1 V = \vec{V} \rightarrow$

Frage: Wie hängen $t, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $t', \vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ zusammen?

Der Zusammenhang zwischen $t, \vec{x}$ und $t', \vec{x}'$ muß linear sein. Denn S, S' sind Inertialsysteme und jede geradlinige, gleichförmige Bewegung bzgl. S muß dies auch bzgl. S' sein.

Der Abstand:

Def Für ein bel. Ereignis in S zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ den Abstand $\boxed{s^2 = \vec{x}^2 - (ct)^2}$ und genauso für S' für dasselbe Ereignis $s'^2 = \vec{x}'^2 - (ct')^2$.

Es gilt $s = 0 \Rightarrow s' = 0$. Denn:

zu $t = 0$ wird bei $\vec{0}$ ein Lichtstrahl ausgesendet. Für die Ortsvektoren des Strahls gilt $\vec{x}^2 = c^2 t^2$. Da sich in S' das Signal mit derselben Lichtgeschw. ausbreitet gilt auch hier $\vec{x}'^2 = (ct')^2$.

$\Rightarrow$ damit $t', \vec{x}'$ linear von t und $\vec{x}$ abhängen muß $s^2 = \kappa s'^2$ proportional sein, mit $\kappa = \kappa(\vec{v}) = \kappa(|\vec{v}|)$ wegen Isotropie.

Betrachten wir nun die inverse Trafo, d.h. S bewegt sich relativ zu S' mit $-\vec{v}$ und $t, \vec{x}$ werden aus $t', \vec{x}'$ erhalten

$\Rightarrow s'^2 = \kappa s^2 \Rightarrow \kappa = +1$ (damit κ bei $\vec{v} = \vec{0}$ stetig ist, $+1$)

x eine Größe, die in jedem Inertialsystem gleich ist, heißt Lorentzinvariant.

Bsp: für 2 Ereignisse a und b ist $s_{ab}^2 = (\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2 - c^2(t_a - t_b)^2$ Lorentzinvariant.

Lorentztrafo = linear: $\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}}$ wie sieht sie aus?

OBdA $\vec{v} = V\vec{e}_1$, d.h. $\Lambda = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. Koordinaten

$x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$, betrachte nun

t, x_1, t', x_1': $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Act + Bx \\ Cct + Dx \end{pmatrix}$, betrachte die "Norm" beider Vektoren

bzw $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

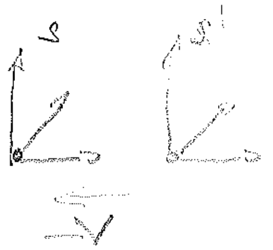
$\Rightarrow x'^2 - (ct')^2 = (Cct + Dx)^2 - (Act + Bx)^2$ beide Seiten müssen $= 0$ sein f. $x' = \pm ct'$ und $x = \pm ct$

$0 = C^2(ct)^2 + 2CD\,ctx + D^2x^2 - A^2(ct)^2 - 2AB\,ctx - B^2x^2$, $x = \pm ct$ einsetzen

$\Rightarrow (C \pm D)^2 = (A \pm B)^2$, mit $V \to 0$ erhalten wir $A = D = 1$, $B = C = 0$

$\Rightarrow \underline{A \pm B = D \pm C} \Rightarrow \underline{A = D \equiv \tilde{\gamma}}$, $\underline{B = C \equiv -\beta\tilde{\gamma}}$

Ursprung von S in S': $\begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & -\beta\tilde{\gamma} \\ -\beta\tilde{\gamma} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\gamma}ct \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ -Vt' \end{pmatrix}$



$\Rightarrow \tilde{\gamma}t = t'$, $\tilde{\gamma}ct\beta = Vt' \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{V}{c}}$

- $\underline{\text{Bestimmung von } \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(V)}$: Isotropie $\Rightarrow \gamma(V) = \gamma(-V)$

$\mathbb{1}_4 = \Lambda\Lambda^{-1} = \tilde{\gamma}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\gamma}\begin{pmatrix} 1 & +\frac{V}{c} \\ \frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\gamma}^2 \begin{pmatrix} 1 - \frac{V^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{V^2}{c^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \equiv \gamma}$ S130

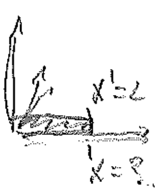
Vorzeichen + damit $\lim\limits_{V \to 0} \tilde{\gamma} = 1$

$\underline{\text{Fazit}}$: $\underline{\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ Lorentztrafo für $\vec{V} = V\vec{e}_1$

d.h. in Komponenten
$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(-\beta ct + x) \end{aligned}} \begin{aligned} &\approx ct\left(1 - \frac{Vx}{c^2t}\right) \approx ct \\ &\approx x - Vt \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nicht relativistisch $\gamma = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right) + O\left(\frac{V^4}{c^4}\right)$, $\beta = \frac{V}{c}$ ist linear

- hieraus folgt z.B. wieder die Lorentzkontraktion: Stab mit Länge L ruhend in S'



$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' \\ L \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} ct' + \beta L \\ \beta ct' + L \end{pmatrix} \Rightarrow ct' = -\beta L$

$t = 0$ linkes Stabende an beiden Ursprüngen, bei welchem x ist das rechte Ende bei $t = 0$

$$\Rightarrow \underline{x} = \gamma L(1-\beta^2) = \sqrt{1-\beta^2}\, L = \gamma^{-1} L < \underline{L}$$

d.h. in S erscheint der Stab um $\frac{1}{\gamma}$ verkürzt.

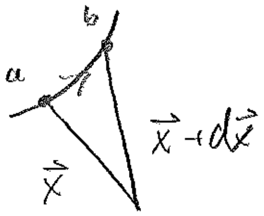
9.3. Transformation der Geschwindigkeit

$\beta = \frac{V}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Es seien S und S' Inertialsysteme, S' bewege sich mit $\vec{V} = V\vec{e}_1$ gegenüber S $\Rightarrow$ Lorentztrafo von $S' \to S$ (Rücktrafo)

$$\begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct' + \beta x_1') \\ \gamma(x_1' + \beta c t') \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

- Betrachte ein Punktteilchen mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$ in S. Wie hängen die Geschwindigkeiten $\vec{v}$ in S und $\vec{v}'$ in S' zusammen?



es gilt in S: $\boxed{dx_i = v_i\, dt \quad (S': dx_i' = v_i'\, dt')}$, $i = 1, 2, 3$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c\,dt \\ v_1 dt \\ v_2 dt \\ v_3 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(c + \beta v_1')\,dt' \\ \gamma(v_1' + \beta c)\,dt' \\ dx_2' = v_2'\,dt' \\ dx_3' = v_3'\,dt' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{c\gamma(v_1' + \frac{V}{c}c)\,dt'}{\gamma(c + \frac{V}{c}v_1')\,dt'} = \frac{v_1' + V}{(1 + \frac{V v_1'}{c^2})}}$$

und $\boxed{v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{c\, v_i'\, dt'}{\gamma(c + \frac{V}{c} v_1')\,dt'} = \frac{v_i'}{(1 + \frac{V v_1'}{c^2})}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ $i = 2, 3$

dies ist das allgemeine Transformationsverhalten für $\vec{V} = V\vec{e}_1$ und $\vec{v}$ bel.

Falls $\underline{\vec{V} = V\vec{e}_1 \text{ und } \vec{v} = v\vec{e}_1}$ kollinear vereinfacht sich dies zu

$\boxed{v_1 = \frac{v_1' + V}{1 + \frac{V v_1'}{c^2}}}$, $v_i = v_i' = 0$ für $i = 2, 3$,

der Einsteinschen Additionsregel f. Geschw. (s. S. 128)