Zwischenspiel – das Zwillingsparadoxon

- Wie wir auf S 130/131 gesehen haben, geht von A aus gesehen die Uhr von B im bewegten System langsamer. Nun gilt umgekehrt auch, daß A sich in Bezug auf B mit $-\vec{v}$ bewegt, d.h. von B aus gesehen geht die Uhr von A langsamer.

Gibt es einen Widerspruch? Dazu müßten wir die Uhren vergleichen, d.h. A müßte anhalten und umdrehen. Das ist der Inhalt des (scheinbaren) Zwillingsparadoxons:

Astronaut B startet mit Alter 21 von der Erde mit einer Rakete mit $v = \frac{12}{13}c$. Nach seiner Uhr fliegt er 5 Jahre, dreht dann um und fliegt mit $\frac{12}{13}c$ zurück. Bei seiner Ankunft ist er genau 31 Jahre alt.
Wie alt ist seine Zwillingsschwester A, die auf der Erde geblieben ist?

- Für A ist die Uhr von B (und damit auch sein Stoffwechsel, sein Puls etc) um den Faktor $\gamma^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}\right)^{-1} = \left(\frac{13}{\sqrt{13^2-12^2}}\right)^{-1} = \left(\frac{13}{\sqrt{169-144}}\right)^{-1} = \left(\frac{13}{5}\right)^{-1}$

langsamer gegangen, d.h. A ist $\frac{13}{5} \cdot 10 = 26$ Jahre älter, und nicht 10!

* Das sogenannte Zwillingsparadox tritt auf, wenn der Flug aus Sicht von B betrachtet wird, nun geht während des Fluges die Uhr von A langsamer! Allerdings ist die Situation nicht symmetrisch, da B in keinem Inertialsystem bleibt, er muß 3x beschleunigen (abbremsen), um von S (System von A) auf S' mit $\vec{v}$ auf S'' mit $-\vec{v}$ auf S zu kommen. Daher gibt es kein Paradoxon.

[Details zum Synchronisieren der Uhren von B mit System S' und S'' siehe Griffiths, Aufgabe 12.16]

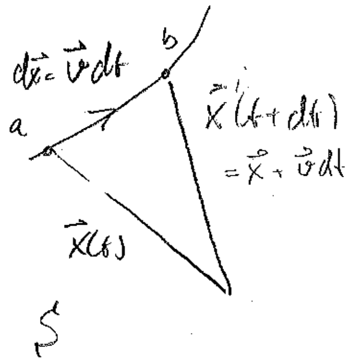
9.4. Vierer-Skalare und -Vektoren [Griffiths 12.1.4]

- Größen, die invariant unter Lorentz-Trafos Λ sind, heißen Vierer-Skalare (4-Skalare). Bsp.: S. 133 $s^2 = \vec{x}^2 - (ct)^2 = s'^2$, bzw. allgemein s_{ab}^2.

"Armbanduhr"

- Wichtiger Spezialfall: Eigenzeit $d\tau$ eines Teilchens mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$

  - zu einem geg. Zeitpunkt t gibt es ein Inertialsystem, in dem das Teilchen zu diesem Zeitpunkt ruht (= Ruhesystem) (dies gilt nur für massive Teilchen, nicht für Photonen (Licht), die mit c sich bewegen!)



* die Eigenzeit $d\tau$ ist definiert als die Zeit (im Ruhesystem S') zwischen den Ereignissen a und b (am selben Ort)

$$\Rightarrow \text{Abstandsquadrat } ds_{ab}'^2 = \underbrace{(\vec{x}_a' - \vec{x}_b')^2}_{=0} - c^2 \underbrace{(t_a' - t_b')^2}_{d\tau} = -c^2 d\tau^2$$

$\rightarrow$ nun ist ds_{ab}^2 Lorentzinvariant d.h.

$$ds_{ab}^2 = -c^2 d\tau^2 = (d\vec{x})^2 - c^2 dt^2 \Leftrightarrow d\tau^2 = \frac{1}{c^2}(c^2 dt^2 - d\vec{x}^2) = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) dt^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d\tau = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\, dt}$$

* für endliche Intervalle ist $\tau_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\, dt$

(= Lorentz-Skalar)

- Was ist ein 4-Skalar? = Verallgemeinerung eines 3-Skalars im $\mathbb{R}^3$, der sich unter Drehungen nicht ändert; hier Drehungen $\rightarrow$ Lorentz-trafos

<u>Def</u> $X = \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$ mit $X^0 = ct$, wir schreiben nun X^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$

als die 4 Komponenten dieses Objektes (vgl. mit X^i, $i = 1, 2, 3$ für den Raumanteil)

Eine solche 4-komponentige Größe $A = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$ heißt 4-Vektor,

wenn sie sich beim Wechsel von S nach S' wie folgt transformiert

$A' = \Lambda A$, d.h. mit einer Lorentztrafo.

Schreibweise in Komponenten: $\boxed{A^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu}$ $\mu = 0,1,2,3$, wobei nach Einstein-scher-(griech.) Summationskonvention über den doppelt vorkommenden Index ν summiert wird von 0 bis 3.

Oft spalten wir dies in Raum- und Zeitanteil auf: $A = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}$, wobei

A^0 unter räumlichen Drehungen invariant und $\vec{A}$ wie ein 3-Vektor transformiert unter Drehungen.

Bsp. für 4-Vektoren: • $X = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ Raumzeit 4Vektor wie auf Vorherigen Seiten $x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

• 4-Geschwindigkeit $\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}}$ eines Teilchens mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$

mit $d\tau$ 4-Skalar und dx^μ 4-Vektor ist auch u^μ ein 4-Vektor, die

Komponenten

$$u^0 = \frac{c\,dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \qquad i = 1,2,3$$

und das Transformationsverhalten ist viel einfacher, als das von $\vec{v}$ (s.S. 135), da $\boxed{u^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu} \Leftrightarrow u' = \Lambda u$. denn dx^μ ist Vierervektor, $d\tau$ Lorentzskalar

Bsp. für weitere 4-Skalare:

• das Quadrat eines 4-Vektors: $A^2 = (A^0)^2 - \vec{A}^2$,

z.B. $u^2 = \frac{c^2}{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - \frac{\vec{v}^2}{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = c^2$

Um das Quadrat einfacher zu schreiben führen wir obere und untere Indizes ein: $A_0 \equiv A^0$, $A_m \equiv -A^m$ $m = 1,2,3$

bzw eine Metrik $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, mit $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$
bzw $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$

$$\Rightarrow \boxed{A^2 = A_\mu A^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu A^\mu}$$

- Insbesondere ist das Skalarprodukt zweier solcher 4-Vektoren ein 4-Skalar $\boxed{A \cdot B \equiv A_\mu B^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu B^\mu = A^\mu B_\mu}$ $\left(= A'^\mu B'_\mu \text{ genau dann wenn } \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\varrho \Lambda^\mu_\delta = \eta_{\varrho\delta} \right)$

- Der 4-Impuls p eines Teilchens mit Masse m und 4-Geschwindigkeit u ist definiert durch $\boxed{p \equiv m u}$ bzw $p^\mu = m u^\mu \Rightarrow p^2 = m^2 c^2$.
Hierbei ist m die Ruhemasse, d.h. die Masse des Teilchens im Inertialsystem, in dem es ruht.
Limes kleiner Geschwindigkeiten: $|\vec{v}| \ll c$

$$\Rightarrow \vec{p} = m \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \approx m\vec{v}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\right)$$ der nicht relativistische Impuls

$$\text{und } p^0 = mc \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \approx mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{v}^4}{c^4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow c p^0 = m c^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{v}^4}{c^2}\right)$$ ist eine Energie E

2. Teil: kinetische Energie eines nicht relativistischen Teilchens
1. Teil: mc^2 = Ruheenergie, $\neq 0$ im Limes $\vec{v} \to 0$

$$\Rightarrow p = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \text{ mit } p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}}$$

dies ist die relativistische Energie-Impuls-Beziehung.

9.5. Die kausale Struktur der Raumzeit

Kann ein Teilchen mit Ruhemasse m auf Lichtgeschwindigkeit (oder schneller) beschleunigt werden?

- die Energie eines Teilchens ist durch die Nullte Komponente p^0 des 4-Impulses $p^\mu = m u^\mu$ gegeben:

$$E = c p^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \Rightarrow E \xrightarrow[|\vec{v}| \to c]{} \infty \text{, d.h. wir}$$

bräuchten so viel Energie, um dies zu erreichen. Die Antwort lautet also nein (aber 99,9% von c geht, wie an Teilchenbeschleunigern am CERN und anderswo mit hohem Aufwand betrieben wird).

- das kann man auch anders sehen: die 3-Vektor Komponente $\vec{p}$ von p^μ:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{c^2 \frac{\vec{p}}{E} = \frac{c^2 m \vec{v}\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}{mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \vec{v}}$$

Wegen $E \overset{\text{S.139}}{=} \sqrt{\underbrace{m^2c^4}_{>0 \text{ für } m>0} + \vec{p}^2c^2} > \sqrt{\vec{p}^2c^2} = |\vec{p}|c \Rightarrow \underline{|\vec{v}| = \frac{c^2|\vec{p}|}{E}} < c\frac{E}{E} = \underline{c}$

D.h. $\underline{|\vec{v}| < c}$ für alle Impulse $\vec{p}$, solange $m > 0$.

Masselose Teilchen:

Obige Energie-Impulsbeziehung liefert $\lim_{m\to 0}\left(E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}\right) = |\vec{p}|c$

wegen $\underline{|\vec{v}|} = \frac{c^2|\vec{p}|}{E} = \frac{cE}{E} = \underline{c}$ für $m = 0$. Aber $|\vec{v}| > c$ geht auch hier nicht.

Also können sich <u>masselose Teilchen</u> wie das Photon mit <u>Lichtgeschwindigkeit</u> bewegen.

<u>Folgerung</u>: Jedes Inertialsystem aus materiellen Maßstäben und Uhren kann sich nur mit $|\vec{v}| < c$ bewegen.