Auf unserem Raum aus 4-Vektoren haben wir ein Skalarprodukt mittels einer Metrik $\eta_{\mu\nu}$ definiert, dieser heißt Minkowski-Raum.

Damit können wir einen "Abstand" zwischen 2 Ereignissen a und b definieren, gegeben durch das negative Quadrat von $x_{ab} = x_a - x_b$:

$$\boxed{s_{ab}^2 = -x_{ab}^2 = -(x_a^\mu - x_b^\mu)(x_{a\mu} - x_{b\mu}) = -c^2(t_a - t_b)^2 + (\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2}$$

(($\exists$ Literatur, in der $\tilde{s}_{ab}^2 = -s_{ab}^2$ als Konvention und Skalarprodukt gewählt wird, d.h. $\tilde{\eta} = -\eta$))

– wie wir gesehen haben ist diese Größe Lorentz-invariant!, d.h. unab. vom Inertialsystem. Es gilt:

1.) $\exists$ Inertialsysteme, in denen a und b gleichzeitig sind $\Leftrightarrow$ $s_{ab}^2 > 0$

2.) $\exists$ Inertialsystem, in denen a und b am gleichen Ort stattfinden $\Leftrightarrow$ $s_{ab}^2 < 0$

Wir zeigen nur 1.):

$\Rightarrow$: klar, wegen $t_a = t_b \Rightarrow s_{ab}^2 = (\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2 > 0$

$\Leftarrow$: $s_{ab}^2 > 0$, wähle das Bezugssystem so, daß $\vec{x}_a - \vec{x}_b = d_{ab}\vec{e}_1$, $d_{ab} > 0$

dann gilt $d_{ab}^2 > c^2(t_a - t_b)^2$, OBdA $t_{ab} \equiv t_a - t_b \geq 0$

$d_{ab} > c\, t_{ab}$

Dann gilt in einem Inertialsystem, das sich mit $\vec{V} = V\vec{e}_1$ bewegt

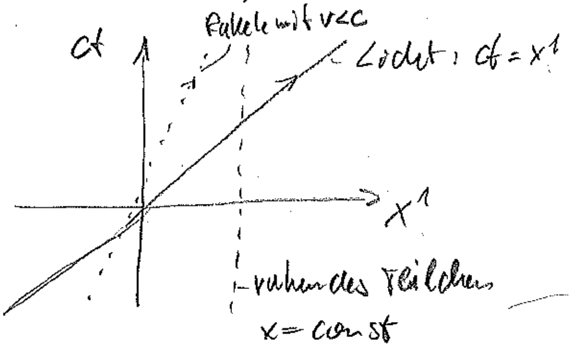
$c\, t_{ab}' = \gamma(c t_{ab} - \beta d_{ab})$. Wähle $\beta = \frac{V}{c} = \frac{c t_{ab}}{d_{ab}} < 1$, ist also möglich $\Rightarrow c t_{ab}' = 0$.

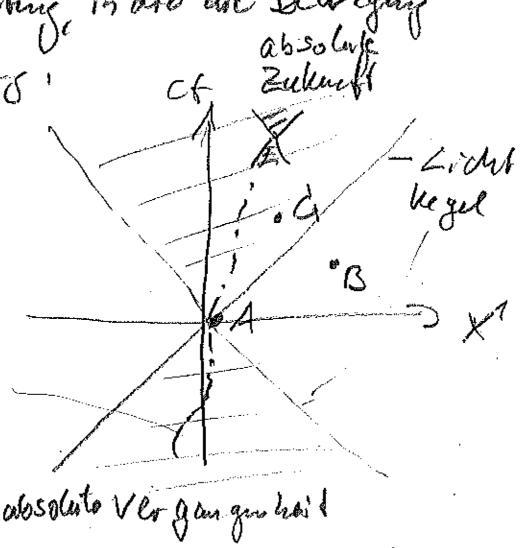
Bemerkung: Es kann hierbei nicht vorkommen, daß sowohl $t_a = t_b$ und $\vec{x}_a = \vec{x}_b$ in einem System ist, dann ist nämlich Ereignis a gleich dem Ereignis b.

Begriffe: Wir nennen den Abstand
- raumartig, wenn $s_{ab}^2 > 0$
- zeitartig, wenn $s_{ab}^2 < 0$
- lichtartig, " $s_{ab}^2 = 0$

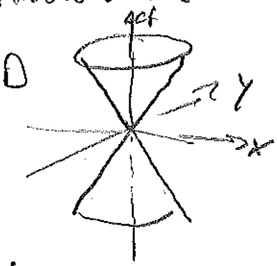
Raum-Zeit- oder Minkowski-Diagramme

- der Einfachheit betrachten wir nur die Richtung, in der die Bewegung stattfindet, diese wählen wir als x^1-Richtung:





- da sich Objekte nicht schneller als c bewegen können, läßt sich das Diagramm in Vorwärts-Lichtkegel (= Zukunft) und Rückwärts-Lichtkegel einteilen (= Vergangenheit); Kegel da z.B. in 2D



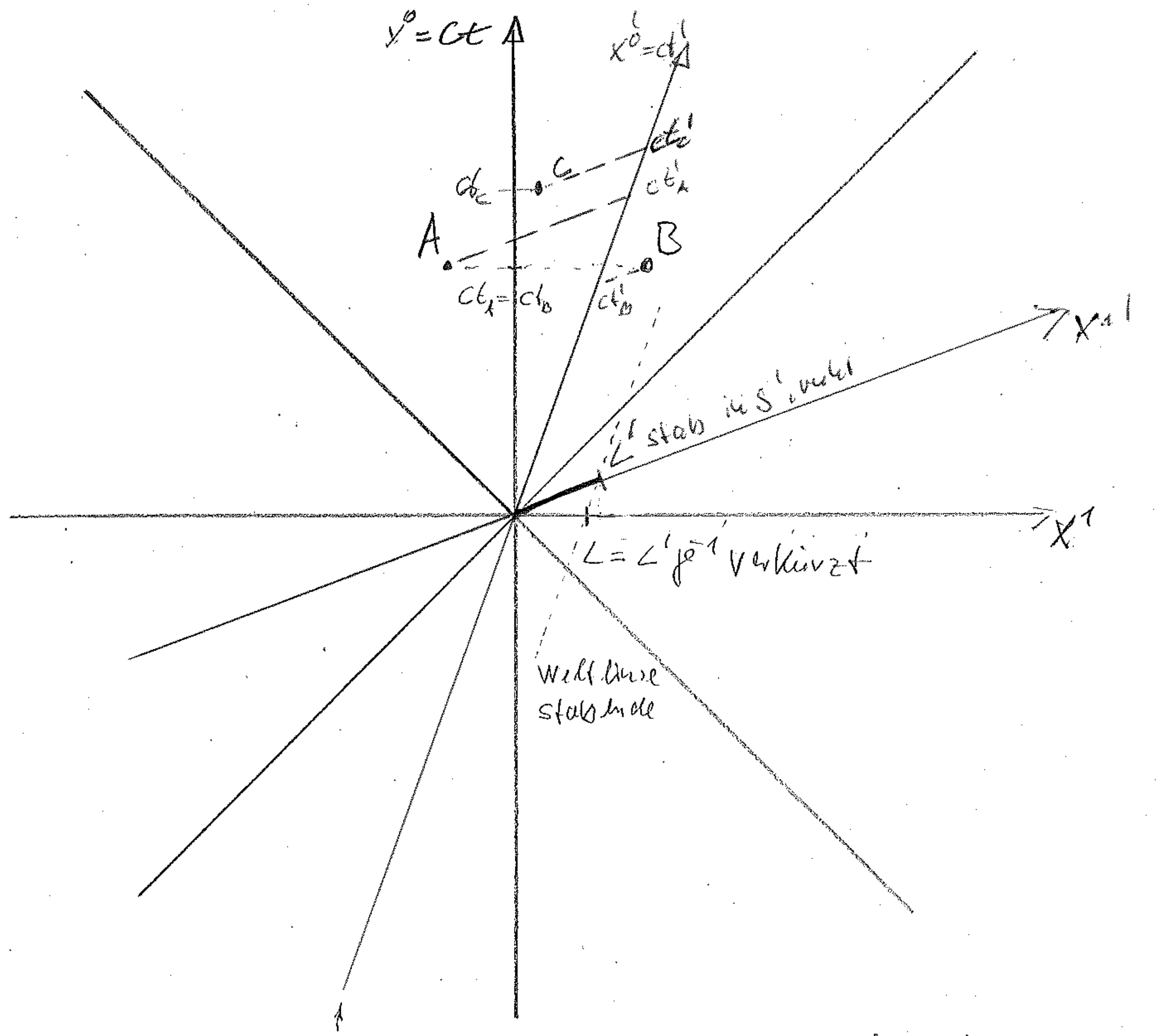
- mathematisch: Lichtkegel = $\{x^\mu \mid x_\mu x^\mu = 0\}$
- Weltlinie eines Teilchens $x^\mu = x^\mu(\tau)$ (z.B. hier parametrisiert durch seine Eigenzeit τ)

  und mit $m>0$ gilt $x^\mu(\tau)x_\mu(\tau) < 0 \quad \forall \tau$
- nur Ereignisse innerhalb des Lichtkegels können ein Teilchen am Ursprung zu $t=0$ erreichen, bzw von ihm ausgehen, d.h. es beeinflussen oder von ihm beeinflußt werden.

Kausalität: wie wir gesehen haben ist eine der Konsequenzen der SRT die Relativität der Gleichzeitigkeit, d.h. es kann ein Inertialsystem S geben, in dem A vor B stattfindet, und ein S', in dem A nach B stattfindet. Dies kann nur für Ereignisse gelten, die den Abstand $s_{AB}^2 > 0$ haben, der raumartig ist, d.h. A und B können sich nicht kausal beeinflussen.

Umgekehrt sind alle Ereignisse, die sich im Vorwärts Lichtkegel (Rückwärts-) von A befinden, in jedem Inertialsystem, daß sich mit $V<C$

Minkowski-Diagramm das S und S' enthält



das in S' ruhende Teilchen (bleibt auf der t'-Achse) bewegt sich in S mit $v < c$

- in S: A und B gleichzeitig (Abstand raumartig, B außerhalb des Lichtkegels von A)
- in S': erst B, dann A
- A und C in beiden Inertialsystemen nacheinander

relativ zu 1 bewegt, nach (vor) Ereignis A, d.h. die Zeitordnung und damit die Zukunft (Vergangenheit) von A ist in diesem Bereich absolut.

9.6. Relativistische Bewegungsgleichungen (Dynamik) [Griffiths 12.2.4]

Wann ist eine Bewegungsgl wie das 2. Newtonsche Gesetz $\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}}$ in allen Inertialsystem gültig?

$\Rightarrow$ wir müssen die Gl durch 4-Vektoren ausdrücken, die sich mit Lorentztrafo transformieren

- $\vec{p}$ ist Teil von $p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$. Betrachte $m = \text{const}$, und

$$\underline{\vec{F} \cdot \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}} \underset{s.139}{=} \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = m\vec{v}\left(\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} - \vec{v} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}^3}\left(-2\left(\frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right)\right)\right)$$

erweitern $\cdot \frac{(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2})}{(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2})}$; cancelt

$$= \frac{m}{\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{mc^2}{\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}}_{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}}$$

[dies ist dieselbe Beziehung zwischen Kraft und geleisteter Arbeit wie in der nicht relativistischen Mechanik $E_b - E_a = \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} d\vec{x} \cdot \vec{F} = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_0} dt\, \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{F}$, wenn oben $\int$ wird]

– mit $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$ lassen sich die beiden obigen Gleichungen als 4-Vektor K^μ schreiben:

$$K^0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\frac{E}{c} = \frac{dE}{c\,dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

und

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\vec{p} = \frac{d\vec{p}}{dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

und damit $\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu}$

Wenn K^μ die Komp. eines 4-Vektors sind, dann ist diese Gl. in allen Inertialsyst. gültig und heißt Lorentz-kovariant (= transf. unter Lorentztrafo).

Bsp.: Lorentz-Kraft in der Elektrodynamik [J.D. Jackson, "Klass. E-dynamik" Kapitel 11.9]

- Bsp. dafür, daß $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld nicht trivial transformieren:
  - nicht beschleunigte Punktladung q: Ruhesystem S' $\exists$ statisches $\vec{E}'$-Feld, $\vec{B}' = 0$. In S bewegt sich q, d.h. es fließt ein Strom und damit ist $\vec{B} \neq 0$

Wir nehmen hier an, daß die elektrische Ladung sich von S nach S' nicht ändert, d.h. Lorentz-invariant ist!

Bewegungsgleichung für Punktteilchen mit Masse $m > 0$ und Ladung q im elektrischen und magnetischen Feld:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \quad . \quad \text{Mit } d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

erhalten wir wie zuvor für $\boxed{\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}}$

sowie für $\boxed{K^0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \frac{q\, \vec{v} \cdot \vec{E}}{c\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}} = \frac{dE/c}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$ $(\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0)$

E Energie $\neq |\vec{E}|$

sowie $\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu}$ in Lorentz-kovarianter Schreibweise (rechte Seite 4-Vektor → S. 149)

9.7 Relativistische Kinematik – Energie- und Impulserhaltung [Griffiths 12.2.3]

In der SRT sind Energie und Impuls separat erhalten, allerdings i.A. nicht die Masse oder kinetische Energie. Wenn letztere erhalten ist sprechen wir von elastischen, sonst von inelastischen Prozessen.

Hierzu 2 Beispiele: