Bsp.: Lorentz-Kraft in der Elektrodynamik [J.D. Jackson, "Klass. E-dynamik" Kapitel 11.9]

- Bsp. dafür, daß $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld nicht trivial transformieren.
  - nicht beschleunigte Punktladung q: Ruhesystem S' $\exists$ statisches $\vec{E}'$-Feld, $\vec{B}' = 0$. In S bewegt sich q, d.h. es fließt ein Strom und damit ist $\vec{B} \neq 0$

Wir nehmen hier an, daß die elektrische Ladung sich von S nach S' nicht ändert, d.h. Lorentz-invariant ist!

Bewegungsgleichung für Punktteilchen mit Masse $m > 0$ und Ladung q im elektrischen und magnetischen Feld:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \quad . \quad \text{Mit } d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

erhalten wir wie zuvor für
$$\boxed{\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}}$$

sowie für
$$\boxed{K^0 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \underset{(\vec{v}\times\vec{B} \perp \vec{v})}{=} \frac{q\,\vec{v}\cdot\vec{E}}{c\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}} = \frac{dE/c}{d\tau} = \frac{1}{c}\,\frac{dE}{dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

E Energie $\neq |\vec{E}|$

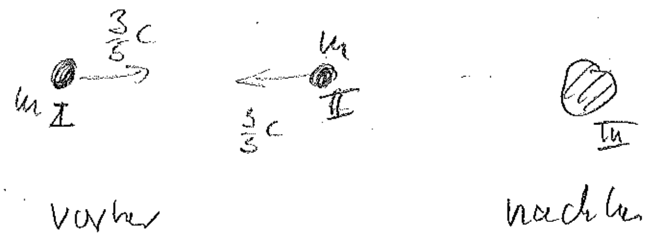
sowie
$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu}$$
in Lorentz-kovarianter Schreibweise.
(rechte Seite 4-Vektor → S. 149)

9.7 Relativistische Kinematik – Energie und Impulserhaltung [Griffiths 12.2.3]

In der SRT sind Energie und Impuls separat erhalten, allerdings i.A. nicht die Masse oder kinetische Energie. Wenn letztere erhalten ist sprechen wir von elastischen, sonst von inelastischen Prozessen.

Hierzu 2 Beispiele:

1) 2 Teilchen mit gleicher Ruhemasse fliegen mit $v = \frac{3}{5}c$ aufeinander zu, kollidieren und bilden ein neues Teilchen mit Masse $M = ?$, welches ruht:
(Stoß vollkommen inelastisch)



Impulserhaltung $\quad \vec{p}_I + \vec{p}_{II} = \vec{0} = \vec{p}_{III}$

Energieerhaltung $\quad E_I + E_{II} = E_{III}$

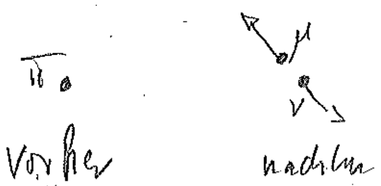
$\Big\}\ p_I^\mu + p_{II}^\mu = p_{III}^\mu$ Energie-Impuls Erhaltung

wobei $\quad E_I/c = p_I^0 = m u_I^0 = \dfrac{mc}{\sqrt{1-\frac{(\frac{3}{5}c)^2}{c^2}}} = \dfrac{mc}{\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}mc$

$\Leftrightarrow E_I = \frac{5}{4}mc^2$, dito $E_{II} = \frac{5}{4}mc^2$ da hier $\vec{v}_{II} = -\vec{v}_I$

$\Rightarrow \underline{E_{III}} \underset{v_{III}=0}{=} Mc^2 = 2\cdot\frac{5}{4}mc^2 = \frac{5}{2}mc^2 > \underline{2mc^2}$, der Summe der 2 Ruhemassen von I und II

2) Pion-Zerfall



d.h. ein Pion π zerfällt in Ruhe in 1 Muon μ + 1 Neutrino ν

• der Einfachheit halber betrachten wir $m_\nu \approx 0$ (da ≤ 2 eV), $m_\pi = 139$ MeV, $m_\mu = 105$ MeV

Energieerhaltung $\quad E_\pi = m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu$

Impulserhaltung $\quad \vec{p}_\pi = \vec{0} = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu \Rightarrow \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$

$m_\nu = 0 \overset{S.140}{\Rightarrow} E_\nu = |\vec{p}_\nu| c$, $m_\mu > 0 \overset{S.139}{\Rightarrow} \vec{p}_\mu^{\,2} = \frac{E_\mu^2}{c^2} - m_\mu^2 c^2 = \vec{p}_\nu^{\,2}$

$\Rightarrow m_\pi c^2 = E_\mu + c\sqrt{\frac{E_\mu^2}{c^2} - m_\mu^2 c^2} = E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}$

$\Leftrightarrow m_\pi^2 c^4 + \cancel{E_\mu^2} - 2 m_\pi c^2 E_\mu = \cancel{E_\mu^2} - m_\mu^2 c^4 \Leftrightarrow \boxed{E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2 m_\pi}}$

9.8. Die Lorentz-Kovarianz der Elektrodynamik

- <u>4-Stromdichte & Kont.</u>: wir betrachten die kovariante ~~For~~ Formulierung der Kontinuitätsgleichung [Griffiths 12.3.4, Jackson 11.9]

Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\vec{j}$ bilden einen 4-Vektor – warum?

dQ infinitesimale Ladung im Volumen dV, homogen verteilt:

$\Rightarrow \rho = \frac{dQ}{dV}$, $\vec{j} = \rho \vec{v}$, $\vec{v}$ Geschwindigkeit dieses infinites. Volumens.

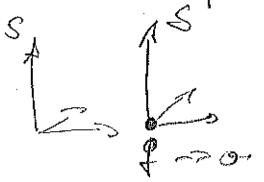
Dichte im Ruhesystem: $\rho_0 = \frac{dQ}{dV_0}$, Ladung ist Lorentzinvariant

Bewegtes System: γ^{-1}-Kontraktion in $\vec{v}$-Richtung , in $\perp$ Richtung nicht $\Rightarrow dV = dV_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{j} = \frac{\rho_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und damit}$$

s. S. 138 u^μ: $\rho = \frac{\rho_0 u^0/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\vec{j} = \rho_0 \vec{u}$, def $J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \rho_0 u^\mu$ ↑ 4-Vektor

<u>Beispiel:</u> Punktladung q am Ursprung von S', ruht dort, bewegt sich mit $\vec{x}(t) = v t \vec{e}_1$ in S



$\Rightarrow$ in S': $\rho'(x') = q\, \delta^{(3)}(\vec{x}')$; $x'^1 = \gamma(x^1 - \beta c t)$, $x'^2 = x^2$, $x'^3 = x^3$

$\Rightarrow$ Regeln f. δ's: $= q \frac{1}{\gamma} \delta(x^1 - \beta c t)\, \delta(x^2)\, \delta(x^3) = \rho'(x) \Leftrightarrow$

mit $\vec{j}' = \vec{0}$ in S' erhalten wir in S $\vec{j}$ durch inverse Lorentztrafo

$$\begin{pmatrix} c\rho \\ j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\rho' \\ \gamma\beta c \rho' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = q\,\delta(x^1 - \beta c t)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3) \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \rho(\vec{x}) = q\,\delta(x^1 - \beta c t)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$, $j^1 = q v\, \delta(x^1 - \beta c t)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$, $j^2 = j^3 = 0$

- die Maxwell-Gl. sind nur konsistent wenn die Kontinuitätsgl. gilt: $0 = \dot{\varrho} + \vec{\nabla}\vec{j} = \frac{\partial \varrho c}{\partial t c} + \frac{\partial}{\partial x^i} j^i = \underline{\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0}$

d.h. die 4er Divergenz von j^μ verschwindet. Wie sieht das im anderen Inertialsystem aus, d.h. $\underline{\text{wie transformiert } \frac{\partial}{\partial x^\mu}}$?

Wir wissen $x^2 = x_\mu x^\mu$ ist Lorentz invariant, und $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^2 = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x^\nu x_\nu) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x^\nu x^\sigma \underbrace{\eta_{\sigma\nu}}_{\text{const}}) = \delta_\mu{}^\nu x^\sigma \eta_{\sigma\nu} + x^\nu \delta_\mu{}^\sigma \eta_{\sigma\nu}$$

mit Produktregel und $\boxed{\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu{}^\nu}$

$$= x^\sigma \eta_{\sigma\mu} + x^\nu \eta_{\mu\nu} = 2 x_\mu$$

d.h. $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ transformiert wie x_μ, schreibe $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$.

$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$ ist invariant da wie das Skalarprodukt $x_\mu x^\mu$ transformiert.

* genauso zeigt man, daß $\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \partial^\nu$ wie x^ν transformiert

- das 4-Vektorpotential: wir bilden aus dem skalaren Pot. ϕ und dem Vektorpotential $\vec{A}$ einen 4-Vektor:

Maxwell-Gl. in $\phi, \vec{A}$: $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$

lösen die homogenen MGl. $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}}\frac{1}{c} = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ inhomogenen MG: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\varrho \Rightarrow \boxed{-\Delta\phi - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = 4\pi\varrho}$ (*)

(bestimmen $\phi, \vec{A}$) $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\dot{\phi} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$ (**)

Def $A^\mu = \begin{pmatrix} \overset{= A^0}{\phi} \\ \vec{A} \end{pmatrix}$. Behauptung ist, daß A^μ wie ein 4-Vektor transformiert.

- durch die MG werden die Komp. von A^μ nicht eindeutig bestimmt.

Wir fixieren die verbleibenden Eichfreiheitsgrade durch Wahl der

Lorentz-Eichung $\underline{0} = \frac{1}{c}\dot{\phi} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial tc}\phi + \frac{\partial}{\partial x^i}A^i = \underline{\partial_\mu A^\mu}$

d.h. wenn A^μ 4-Vektor ist diese Bedingung Lorentz-invariant!

$\Rightarrow$ (*) und (**) werden zu
$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi &\equiv \Box\phi = 4\pi\rho \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} &= \Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}\right\} \underline{\underline{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu}}$$

wobei $\Box = \left(\frac{\partial}{\partial tc}\right)^2 - \Delta = \partial_\mu\partial^\mu$ Lorentzinvariant ist (Lorentz-Skalar)

$\Rightarrow$ mit j^μ 4-Vektor und $\Box$ invariant ist damit A^μ 4-Vektor ✓

• der Feldstärketensor

wird drücken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch A^μ aus
$$\begin{cases} E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = \overbrace{-(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)}^{= F^{i0}} \\ B^i = \varepsilon^{ijk}(\partial_j A^k) = -\varepsilon^{ijk}\partial^j A^k \end{cases}$$

zyklisch $\quad -(\partial^j A^k - \partial^k A^j) \quad$ ijk = 1,2,3 usw

Def $\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$

$\Rightarrow$ Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu}$,

dieser ist antisymmetrisch

mit Transformationseigenschaft wie $\partial^\mu A^\nu$, d.h. Tensor 2. Stufe bei Lorentztrafo (Vektor = Tensor 1. Stufe): $\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}}$

* hieraus ergeben sich die Transformationen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Feld (später), wir möchten aber zunächst gerne die Lorentz-Kovarianz der MG sehen:

<u>inhomogene MGn</u>: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \partial_i F^{i0} \overset{F^{00}=0}{=} \partial_\mu F^{\mu 0} = 4\pi\rho$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})^i = \dots = \partial_j F^{ji}, \quad -\frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = -\partial_0 F^{i0} = +\partial_0 F^{0i}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}\right)^i = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c}j^i$$

Fazit: $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$ ist Lorentz-kovariant!