Wir fixieren die verbleibenden Eichfreiheitsgrade durch Wahl der

Lorentz-Eichung $\underline{0} = \frac{1}{c}\dot{\phi} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial tc}\phi + \frac{\partial}{\partial x^i}A^i = \underline{\partial_\mu A^\mu}$

d.h. wenn $A^\mu$ 4-Vektor ist diese Bedingung Lorentz-invariant!

$\Rightarrow$ (*) und (**) werden zu
$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi &\equiv \Box\phi = 4\pi\rho \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} &= \Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{aligned}\right\} \underline{\underline{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu}}$$

wobei $\Box = \left(\frac{\partial}{\partial tc}\right)^2 - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu$ Lorentzinvariant ist
(Lorentz-Skalar)

$\Rightarrow$ mit $j^\mu$ 4-Vektor und $\Box$ invariant ist damit $A^\mu$ 4-Vektor ✓

• der Feldstärketensor

wird drücken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch $A^\mu$ aus
$$\begin{cases} E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) = F^{i0} \\ B^i = \varepsilon^{ijk}(\partial_j A^k) = -\varepsilon^{ijk}\partial^j A^k \end{cases}$$
zyklisch $= -(\partial^j A^k - \partial^k A^j)$ $ijk = 1,2,3$ usw

Def $\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$

$\Rightarrow$ Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu}$,

dieser ist antisymmetrisch

mit Transformationseigenschaft wie $\partial^\mu A^\nu$, d.h. Tensor 2. Stufe bei Lorentztrafo (Vektor = Tensor 1. Stufe): $\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}}$

* hieraus ergeben sich die Transformationen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Feld (später), wir möchten aber zunächst gerne die Lorentz-Kovarianz der MG sehen:

inhomogene MGn: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \partial_i F^{i0} \overset{F^{00}=0}{=} \partial_\mu F^{\mu 0} = 4\pi\rho$

$(\vec{\nabla}\times\vec{B})^i = \ldots = \partial_j F^{ji}$, $\quad -\frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = -\partial_0 F^{i0} = +\partial_0 F^{0i}$

$\Rightarrow \left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}\right)^i = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i$

Fazit: $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$ (I) ist Lorentz-kovariant!

$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu =$

<u>homogene MG</u>: durch Einführung von $A^\mu$ haben wir diese schon gelöst, d.h. wir brauchen eine Gleichung, die $F^{\mu\nu}$ automatisch erfüllt:

Jacobi-Identität $$\boxed{0 = \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu}} \quad \text{II}$$

gilt durch Einsetzen von $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ (und $[\partial^\mu, \partial^\nu] = 0$)

hierbei entspricht $0 = \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12}$ der Gl. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
(da $B^i$ $F^{jk}$ enthält)

und $0 = \partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02}$ der Gl. $-\frac{1}{c}\dot{B}^1 - (\vec{\nabla} \times \vec{E})^1 = 0$
usw.

<u>Bemerkung</u>: im Gegensatz zu $A^\mu$ ist der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ unabhängig von der gewählten Eichung! D.h. I und II gelten eichunabhängig

* <u>zurück zur Lorentz-Kraft</u> (s. S. 144):

wir hatten mit $u^\mu = \binom{c}{\vec{v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ in $\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu$ folgende Beziehungen

$K^0 = \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{E}$ sowie $\vec{K} = \frac{q}{c}(u^0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ ; wie $\vec{E}$ und $\vec{B}$
$\stackrel{!}{=} \frac{q}{c} u^i F^{i0}$ $\qquad \stackrel{!}{=} \frac{q}{c}(u^0 F^{i0} + \vec{u} \times \vec{B})$ ;
$\stackrel{!}{=} \ldots$

transformieren wissen wir noch nicht, aber daß $K^\mu$ ein 4-Vektor schon:

Mit $(\vec{u} \times \vec{B})^1 = u^2 B^3 - u^3 B^2 = u^2 F^{21} - u^3 F^{13}$ usw

können wir schreiben daß $$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$ gilt.

Dies erklärt uns nun, warum diese Kombination von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in $K^\mu$ wie ein 4-Vektor transformiert, und bestätigt die Kovarianz dieser Gleichung, die nun durch das Vektorpotential $A^\mu$ über $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ausgedrückt ist.

## 9.9 Transformation des $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldes [Jackson 11.10]

Wie wir gesehen haben transformiert sich der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ wie ein Tensor 2. Stufe $F^{\mu\nu\prime} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$

∘ Wir betrachten eine Lorentztrafo in ein System $S'$, das sich mit $\vec{V} = V\vec{e}_1$ bewegt $\Rightarrow$

$$\Lambda^\mu{}_\rho = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \boxed{\Lambda^2{}_2} & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \boxed{\Lambda^3{}_3} \end{pmatrix}$$

hieraus ergibt sich folgendes Ergebnis für die Komponenten von

**$\vec{E}$-Feld:** $E^{1\prime} = F^{10\prime} = \Lambda^1{}_\rho \Lambda^0{}_\sigma F^{\rho\sigma}$ ← über $\rho$ und $\sigma$ wird summiert von 0,1,2,3

$$= \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_0 \underbrace{F^{00}}_{=0} + \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_1 \underbrace{F^{01}}_{=-F^{10}=E^1} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_0 \underbrace{F^{10}}_{=E^1} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_1 \underbrace{F^{11}}_{=0}$$

$$\overset{!}{=} \left(-(\beta\gamma)^2 + \gamma^2\right) E^1 = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} E^1 = \underline{E^1}$$

$$\underline{E^{2\prime}} = F^{20\prime} = \Lambda^2{}_\rho \Lambda^0{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^2{}_2 \left(\Lambda^0{}_0 F^{20} + \Lambda^0{}_1 F^{21}\right)$$

$$\overset{!}{=} \gamma F^{20} - \beta\gamma F^{21} = \underline{\gamma\left(E^2 - \beta B^3\right)}$$

$$\underline{E^{3\prime}} = F^{30\prime} = \Lambda^3{}_\rho \Lambda^0{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^3{}_3 \left(\Lambda^0{}_0 F^{30} + \Lambda^0{}_1 F^{31}\right)$$

$$\overset{!}{=} \gamma F^{30} - \beta\gamma F^{31} = \gamma\left(E^3 - \beta(-B^2)\right) = \underline{\gamma\left(E^3 + \beta B^2\right)}$$

**$\vec{B}$-Feld:** $\underline{B^{1\prime}} = F^{32\prime} = \Lambda^3{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^3{}_3 \Lambda^2{}_2 F^{32} = \underline{B^1}$

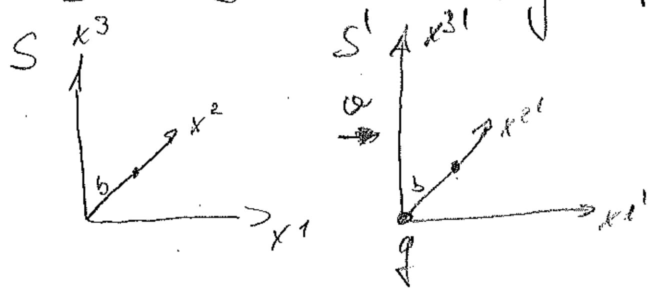
$$\underline{B^{2\prime}} = F^{13\prime} = \Lambda^1{}_\rho \Lambda^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \left(\Lambda^1{}_0 F^{03} + \Lambda^1{}_1 F^{13}\right) \Lambda^3{}_3$$

$$\overset{!}{=} -\beta\gamma F^{03} + \gamma F^{13} = \underline{\gamma\left(\beta E^3 + B^2\right)}$$

$$\underline{B^{3\prime}} = F^{21\prime} = \Lambda^2{}_\rho \Lambda^1{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^2{}_2 \left(\Lambda^1{}_0 F^{20} + \Lambda^1{}_1 F^{21}\right)$$

$$\overset{!}{=} \underline{\gamma\left(-\beta E^2 + B^3\right)}$$

**Beispiel** Bestimme das Feld einer Punktladung $q$, die in $S'$ am Ursprung ruht, im System $S$ an der Stelle $\vec{x} = b\vec{e}_2$, wobei sich $S'$ in $\vec{e}^1$-Richtung mit $v$ bzgl. $S$ bewegt.




- in $S'$ sind die Felder einfach (Elektrostatik): $\vec{E}'(\vec{x}') = \frac{q\vec{x}'}{|\vec{x}'|^3}$, $\vec{B}' = \vec{0}'$

$\to$ der uns interessierende Punkt auf der $x^2$-Achse in $S$ hat in $S'$ die Koordinaten $\vec{x}_b' = \begin{pmatrix} -vt' \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{x}_b')^2 = (v^2t'^2 + b^2)$

$\Rightarrow$ eingesetzt in $\vec{E}'(\vec{x}_b') = \frac{+q}{(v^2t'^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -vt' \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

- $t'$ ausgedrückt durch $t, x^1$: $ct' = \gamma(ct - \beta x^1)$, hier ist $x^1 = 0$
mit $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\quad = \gamma c t \quad \Leftrightarrow t' = \gamma t$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \frac{q}{(v^2\gamma^2t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -v\gamma t \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Feld in $S'$ in ungestrichenen Koord. ausgedrückt

- wir benutzen nun die Rücktrafo zu der Lorentz-trafo $\vec{E} \to \vec{E}'$, $\vec{B} \to \vec{B}'$ der letzten Seite:

$$E^1 = E^{1\prime} = -\frac{qv\gamma t}{(v^2\gamma^2t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E^2 = \gamma(E^{2\prime} + \beta \underset{=0}{B^{3\prime}}) = \frac{qb\gamma}{(v^2\gamma^2t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E^3 = \gamma(E^{3\prime} - \beta B^{2\prime}) = 0$$

und genauso $\quad B^1 = B^{1\prime} = 0$, $B^2 = \gamma(-\beta E^{3\prime} + B^{2\prime}) = 0$

$$B^3 = \gamma(+\beta E^{2\prime} + \underset{=0}{B^{3\prime}}) = \frac{\gamma\beta b q}{(v^2\gamma^2t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\Rightarrow$ es gibt nun im S auch ein $\vec{B}$-Feld $\neq \vec{0}$, mit dem in $\vec{e}_1$-Richtung fließenden (t-abhängigen) Strom zeigt nach Rechte-Hand-Regel $\vec{B}$ $\rightarrow \vec{E}$ zeigt auf der $\vec{e}_2$-Achse bei b das $\vec{B}$-Feld in $\vec{e}_3$-Richtung

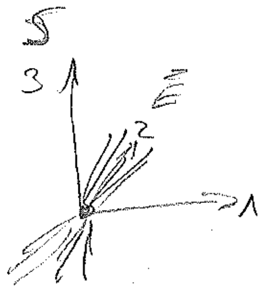
- Wir betrachten nun sehr große Geschwindigkeiten $v \lesssim c$ d.h. $\beta \lesssim 1$, $\gamma \gg 1$

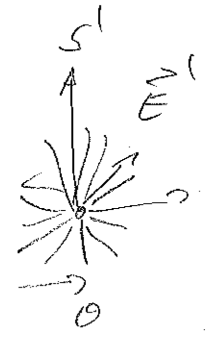
- der maximale Wert der 2. Komponente vom $\vec{E}$-Feld in S, $E^2$ wird zu $t=0$ erreicht, und ist um Faktor $\gamma$ größer als $E^{2'}$

$\underline{t=0}$: $E^2 = \gamma \frac{q b}{\cancel{(b^2)^{3/2}}_{b^2}} = \gamma E^{2'}$

- für wachsende Geschwindigkeit $v\nearrow$ und damit wachsendes $\gamma$ wird das Zeitintervall in dem $E^2$ groß ist ~~immer~~ kleiner $\Delta t \approx \frac{b}{\gamma v}$

- für $\beta \to 1$ wird $B^3$ so groß wie das transversale Feld $E^2$, wie bei einer e.m. Welle, die sich in $\vec{e}_1$ Richtung ausbreitet. gleichzeitig gibt es ein longitudinales elektrisches Feld $E^1$, das bei $t=0$ sein Vorzeichen wechselt.



## Eigenschaften der Lorentzgruppe $O(3,1)$

- auf Seite 138 hatten wir das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren wie folgt eingeführt $A\cdot B = A_\nu B^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu A^\mu = A'_\sigma A'^\sigma = \eta_{\sigma\delta} A'^\delta A'^\sigma$ (*)

und behauptet, daß dies Lorentzinvariant ist.

* Stimmt dies, und gibt es noch andere Trafos, die $A\cdot B$ invariant lassen?

- mit $A'^\delta A'^\sigma = \Lambda^\delta{}_\nu A^\nu \Lambda^\sigma{}_\mu A^\mu$ muß gelten:

(1) $$\boxed{\eta_{\mu\nu}} \stackrel{!}{=} \eta_{\sigma\delta} \Lambda^\delta{}_\nu \underbrace{\Lambda^\sigma{}_\mu}_{=(\Lambda_\mu{}^\sigma)^T} = \Lambda_\mu{}^{\sigma T} \eta_{\sigma\delta} \Lambda^\delta{}_\nu = \underbrace{(\Lambda^T \eta \Lambda)_{\mu\nu}}_{\text{check}}$$

- bilden wir die Determinante auf beiden Seiten, mit $\det M = \det M^T$ und $\det ABC = \det A \det B \det C$ folgt $\overset{=-1}{\det \eta} = (\det \Lambda)^2 \overset{=-1}{\det \eta}$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\det \Lambda = \pm 1}. \quad \left[\text{Check: } \det\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & \\ -\gamma\beta & \gamma & \\ & & 1\;1 \end{pmatrix} = \gamma^2 - (-\beta\gamma)^2 = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^2} = +1 \checkmark\right]$$
sowie

- die Gruppe, die die Bilinearform (*) invariant läßt heißt $O(3,1)$, da sie eine Metrik mit 3− und 1+ invariant läßt. Sie hat dieselbe Anzahl von Generatoren (Erzeugende) wie die Gruppe $O(4)$ (alle reellen 4x4 Matrizen mit $OO^T = \mathbb{1}_4$)

$\dim O(N=4) = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$, d.h. sie enthält

- 3 Generatoren für Lorentz-Trafos (in $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ oder $\vec{e}_3$-Richtung) (= Lorentz-boosts)

- 3 Generatoren für Drehungen im $\mathbb{R}^3$, denn diese lassen in $A\cdot B = A^0 B^0 - \vec{A}\cdot\vec{B}$ ← diesen Teil invariant

- die $O(3,1)$ enthält: $\Lambda = I = \mathbb{1}_4$ Identität, $\Lambda = I_P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ Parität P $\Rightarrow I_P A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ -\vec{A} \end{pmatrix}$

$\Lambda = I_T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$: Zeitspiegelung: $I_T A^\mu = \begin{pmatrix} -A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

und $\Lambda = I_{PT} = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$ P & T

- zur Erinnerung: die $O(2)$ im $\mathbb{R}^2$ enthält eigentliche Drehungen, mit $\det O_0 = +1$ und Spiegelungen mit $\det O = -1$. $O_0 \in SO(2)$, mit $\mathbb{1}_2 \in SO(2)$. Diese bilden zwei Zusammenhangskomponenten, da Spiegelungen nicht kontinuierlich in die $\mathbb{1}_2$ deformiert werden können.

$\Rightarrow$ die Lorentzgruppe hat 4 Zusammenhangskomponenten:

$\mathcal{L}_{(+)}^{\uparrow} \ni I$, $\mathcal{L}_{(+)}^{\downarrow} \ni I_{PT}$, beide haben $\det \Lambda = +1$, d.h. $\in SO(3,1)$

$\mathcal{L}_{(-)}^{\uparrow} \ni I_P$, $\mathcal{L}_{(-)}^{\downarrow} \ni I_T$ " " $\det \Lambda = +1$

mit (A) für $\mu = \nu = 0$ $1 = \eta_{00} = \eta_{00} \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \underbrace{\Lambda_j{}^0 \Lambda_j{}^0}_{\geq 0} = 1$

lassen sich diese durch die 2 Lösungen von $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$ charakterisieren:

$\Lambda^0{}_0 \geq +1$ : $\mathcal{L}_{\pm}^{\uparrow}$

$\Lambda^0{}_0 \leq -1$ $\mathcal{L}_{\pm}^{\downarrow}$

* alle diese 4 Komponenten bilden $O(3,1) = \mathcal{L}_{+}^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_{-}^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_{+}^{\downarrow} \cup \mathcal{L}_{-}^{\downarrow}$ und lassen sich nicht durch stetige Deformationen ineinander überführen.