[Darstellungen in einer ungeraden Dimension, z. B. 3x3 ?
$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$, bilde det, $\det(-\mathbb{1}) = (-1)^D$

$\Rightarrow \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) = (-1)^D \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu)$

wenn wir verlangen daß $\det[\gamma^\mu] \neq 0 \; \forall \mu = 0,1,2,3 \Rightarrow D = 2n$
$n = 1, 2, \ldots$]

Lagrange-Dichte des Dirac Spinors

Um eine invariante Lagrangefunktion zu erhalten, deren Bewegungsgl. die Dirac-Gl. ist, benötigen wir noch zu $\Psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$
$\Psi^+ = (a^*, b^*, c^*, d^*)$. Wie sich zeigen läßt ($\rightarrow$ Ü) erfüllt $\bar\Psi = \Psi^+ \gamma_0$
(wegen unterschiedl. Hermitizität von γ^μ)
die Gleichung $\underline{\bar\Psi (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0}$ wobei $\overleftarrow{\partial}_\mu$ nach links wirkt

Damit lautet $\boxed{\mathcal{L}_D = \bar\Psi(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x)}$ die Lagrangefkt zur Dirac-Gl.

* hierbei werden $\bar\Psi(x)$ und $\Psi(x)$ als unabhängige Felder betrachtet (wie zuvor $\phi(x)$ und $\phi^*(x)$)

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gl. $\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar\Psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar\Psi)} \right) = 0} \overset{Ü}{\Longleftrightarrow}$ Dirac Gl. für Ψ und $\bar\Psi$

- der dazugehörige erhaltene Strom ist $\underline{j^\mu(x) = \bar\Psi(x) \gamma^\mu \Psi(x)}$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße: Ü

Die Maxwell-Gleichungen (Spin 1 Teilchen), z.B. Photonen

Viererpotential $\boxed{A^\mu_{(x)} = (\underbrace{A^0_{(x)}}_{\text{Skalarpotential}}, \overbrace{\vec{A}_{(x)}}^{\text{Vektorpotential}})}$

elektromagnetischer Feldstärketensor $\boxed{F^{\mu\nu}_{(x)} = \partial^\mu A^\nu_{(x)} - \partial^\nu A^\mu_{(x)}}$ (*)

Maxwell-Gleichungen (in kovarianter Formulierung)

$\forall \nu$ $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}_{(x)} = 0}$ (I) ohne Quellen (mit ...: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ $(= \begin{pmatrix} \underset{\text{Ladungsdichte}}{\rho} \\ \underset{\text{Strom}}{\vec{j}} \end{pmatrix})$; Kontinuitäts Gleichung $\partial_\nu j^\nu = 0$)

und

$\forall \mu,\nu,\rho$ ist $\boxed{\partial^\mu F^{\nu\rho}_{(x)} + \partial^\nu F^{\rho\mu}_{(x)} + \partial^\rho F^{\mu\nu}_{(x)} = 0}$ (II) identisch erfüllt (wegen antisym. von (*) und $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$)

- Zusammenhang mit elektrischem $\vec{E}$- und magnetischem $\vec{B}$-Feld:

$$\boxed{F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = (-\vec{\nabla} A^0 - \partial_t \vec{A})^{i\text{-te Komp}} = E^i}$$

$$\boxed{F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon_{ijk} B^k}$$

mit $B^k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^{k\text{-te}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}}$$ antisym.

- (II) ist äquivalent zu den Identitäten $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0}$

(I) ohne Quelle is äquivalent zu $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{0}$ (mit Quellen $= \rho = j^0$, $= \partial_t \vec{j}$)

- Bewegungsgl. in A^μ: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \boxed{\Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0}$

Eichfreiheit:

* physikalisch: $A^\mu(x)$ hat 4 Freiheitsgrade, das Photon aber nur 2

* mathematisch:

$A^\mu(x)$ ist nicht eindeutig bestimmt:

unter der (inhomogenen!) Eichtransformation

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x), \qquad \chi(x) \text{ Skalarfeld}$$

ändert sich weder die Feldstärke $F^{\mu\nu}(x)$ $(\partial^\mu\partial^\nu\chi - \partial^\nu\partial^\mu\chi = 0)$
und damit auch nicht $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld, noch
die Bewegungsgleichungen (I) & (IV)

$\Rightarrow$ Eichfixierung: (Ü) (L.V. Lorenz ≠ H. Lorentz)

* Wahl von $\chi(x)$ so daß $\boxed{\partial_\mu A^\mu(x) = 0}$ Lorenzeichung (kovariant)

$\Rightarrow$ Bewegungsgl $\Box A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\Box A^\nu = 0}$ wie KG ohne Masse

* wir können $\chi(x)$ um Lösungen von $\Box\chi(x) = 0$ verschieben

$\Rightarrow$ Wahl $\boxed{A^0(x) = 0}$ Weyl-Eichung d.h. wir haben 4 auf 2 Freiheitsgrade reduziert

$\Rightarrow$ $\partial_\mu A^\mu = \boxed{\partial_i A^i = 0}$ Coulomb-Eichung

* es gibt andere Wahlmöglichkeiten, z.B.

$A_3(x) = 0$ Axiale Eichung, oder parameterab. Eichungen in der QFT

Proca-Gleichung: (Maxwell mit Masse)

(*) $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$, ist kovariant $\quad | \cdot \partial_\nu \Rightarrow m^2 \partial_\nu A^\nu = 0, \; m \neq 0 \Rightarrow \partial_\nu A^\nu = 0$

$\Rightarrow$ Bewegungsgl für A^ν: $\boxed{\Box A^\nu + m^2 A^\nu = 0}$ wie KG-Gl.

Aber: (*) ist nicht mehr invariant unter Eichtrafos!!

Lagrange-Dichte des Vierervektors:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$$ führt über die Euler-Lagrange Gleichungen auf die Bewegungsgl. (I) (ohne Quellen)

* mit Hilfe des dualen Feldstärketensors

$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ läßt sich die Identität (II) auch kompakter als $\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$ schreiben

* im Prinzip könnte man zu $\mathcal{L}$ noch einen weiteren kovarianten Term hinzufügen, $-\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

Es stellt sich aber heraus, daß dies eine totale Ableitung ergibt (→ Ü). Für bestimmte Ω ist $\int_\Omega d^4x\, \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ eine topologisch nicht triviale Invariante und heißt Pontryagin Index.

Lösung der Klein-Gordon Gleichung [Lit: z.B. Kapitel 3, 0. Nachtmann]

- beschreibt freies Spin 0 Teilchen $\phi(x)$ (kann $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$ sein):

$$0 = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x)$$ Wellen-Gl in 4D

Ansatz ebene Welle: $\phi(x) = N e^{-ik_\mu x^\mu}$, N x-unabh.

$$\Rightarrow (-k_\mu k^\mu + m^2) N e^{-ik_\mu x^\mu} = 0 \quad \forall x_\mu$$

$$\Rightarrow (-k_\mu k^\mu + m^2) = 0 \Leftrightarrow k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$, def $E_{\vec{k}} = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

- da die KG linear ist ist jede Superposition solcher Ebenen Wellen ebenfalls eine Lösung:

$$\phi(x) = \int d^3k \left[N_+(\vec{k}) e^{-iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} + N_-(\vec{k}) e^{+iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} \right]$$

↑ substituiere $\vec{k} \to -\vec{k}$, $E_{-\vec{k}} = E_{\vec{k}}$

$$= \int d^3k \left[N_+(\vec{k}) e^{-iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} + N_-(-\vec{k}) e^{+iE_{\vec{k}}t - i\vec{k}\vec{x}} \right]$$

Umbenennung: $\vec{k} \to \vec{p}$, $E_{\vec{k}} \to p^0 \equiv E_{\vec{p}}$, $\Rightarrow p_\mu p^\mu = m^2$, $\Rightarrow E_{\vec{k}}t - \vec{k}\vec{x} = p_\mu x^\mu$

Normierungskonvention
$$N_+(\vec{k}) \to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}$$, $a_{\vec{p}}$ Funktion von $\vec{p}$

$$N_-(-\vec{k}) \to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} b^*_{\vec{p}}$$, $b_{\vec{p}}$ " " "

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu} + b^*_{\vec{p}} e^{+ip_\mu x^\mu} \right]}$$ allgem. Lsg.

wenn $\phi^*(x) = \phi(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$, sonst wenn $\phi(x) \in \mathbb{C}$ sind $a_{\vec{p}}, b_{\vec{p}}$ unabh.

Zurück zu Teilchen mit Masse m und festem Impuls $\vec{p}_0$:

$$a_{\vec{p}} \sim \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_0) \Rightarrow \phi(x) \sim e^{-iE_{\vec{p}_0}t + i\vec{p}_0\vec{x}}$$

$$b^{+}_{\vec{p}} \sim \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_0) \Rightarrow \phi(x) \sim e^{+iE_{\vec{p}_0}t - i\vec{p}_0\vec{x}}$$

* $\exists$ Teilchen mit negativer Energie ? Dann wäre das Universum instabil da sich die Gesamtenergie immer durch Erzeugung neuer Teilchen verringern ließe.

Bessere Interpretation [Stückelberg, Feynman]:

$e^{+iEt} = e^{-iE(-t)}$ entspricht einem Teilchen mit pos. $E>0$ das rückwärts in der Zeit propagiert

= Antiteilchen das vorwärts propagiert

also für $\xrightarrow{t}$ ist $\longrightarrow$ Teilchen

$\longleftarrow$ Antiteilchen.

Um diese Interpretation zu formalisieren brauchen wir die Quantenfeldtheorie (QFT) - "zweite Quantisierung", ϕ wird zu einem Operator der auf das Vakuum wirkt, wie im Harmonischen Oszillator

Zweite Quantisierung:

wie beim Übergang von Punktteilchen zu Feldern im Lagrange-formalismus betrachten wir

klass. Mechanik $p = m\dot{x}$ $\rightarrow$ QM $[\hat{x}, \hat{p}] = i$

klass. Felder $\phi(x)$ $\rightarrow$ QFT $\boxed{[\hat{\phi}(\vec{x},t), \partial_0\hat{\phi}^{+}(\vec{y},t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})}$ ⊗

(wichtig: diese Vertauschungsrelation zwischen $\hat{\phi}$ und seinem kanonisch konjugierten Impulsop $\partial_0\hat{\phi}^{+}$ ist zu gleichen t!)