$\Rightarrow$ in der allgemeinen Lösung $\phi(\vec{x},t) = \int d^3p \ldots$ werden $a_{\vec{p}} \to \hat{a}_{\vec{p}}$, $b_{\vec{p}} \to \hat{b}_{\vec{p}}$

zu Operatoren, die auf Vakuum $|0\rangle$ wirken.

<u>Behauptung:</u> Wenn $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^{+}_{\vec{p}}$ die Vertauschungsrelation des harm. Oszillators erfüllen, dann gilt für $\hat{\phi}$ die Relation ⊛

d.h.
$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{p}'}] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'),$$
$$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^{+}_{\vec{p}'}] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'),$$
$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}^{+}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}^{+}_{\vec{p}'}] = 0$$
$$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{b}^{+}_{\vec{p}}, \hat{b}^{+}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}^{+}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}^{+}, \hat{b}^{+}_{\vec{p}'}] = 0$$

<u>Beweis:</u> setze ein $\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{b}^{+}_{\vec{p}} e^{ip_\mu x^\mu}\right]$

$$\Rightarrow \hat{\phi}^{+}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{}} \left[\hat{a}^{+}_{\vec{p}} e^{+ip_\mu x^\mu} + \hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip_\mu x^\mu}\right]$$

$$\Rightarrow \partial_0 \hat{\phi}^{+}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{}}\, iE_{\vec{p}} \left[\hat{a}^{+} e^{ip\cdot x} - \hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x}\right]$$

• $[a,b]$ ist linear

$$\Rightarrow [\hat{\phi}(x), \partial_0 \hat{\phi}^{+}(y)] = \int \frac{d^3p\, d^3q}{\sqrt{}\sqrt{}} \Big\{ \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^{+}_{\vec{q}}]}_{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})} e^{-ipx+iqy} - \underbrace{[\hat{b}^{+}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}]}_{-\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})} e^{+ipx-iqy} \Big\} iE_{\vec{q}}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{iE_{\vec{p}}}{2E_{\vec{p}}} \left\{ e^{iE_{\vec{p}}(y_0-x_0) - i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})} + e^{iE_{\vec{p}}(x_0-y_0) - i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \right\}$$

nur für $\underline{x_0 = y_0}$ können wir $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{\pm i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ benutzen (δ ist gerade)

und damit erhalten wir ⊛

Physikalische Interpretation

- in Analogie zu $[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\,\delta_{kl}$

ist $\partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) = \hat{\pi}(x)$ zu $\hat{\phi}(x)$ der kanonisch konjugierte Feldoperator

$$\boxed{[\hat{\phi}(x,t), \partial_0\hat{\phi}(y,t)] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})}$$

→ wie in der klassischen Mechanik gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \partial_0 \hat{\phi}(x)} = \hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) \quad \text{mit } \mathcal{L}_{KG} \text{ der Langrangefunktion}$$

- durch Legendre transformation können wir so die Hamiltonoperator-dichte $\mathcal{H}$ gewinnen

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\phi},\hat{\pi}) = \hat{\pi}(x)\,\partial_0\hat{\phi} - \mathcal{L}(\hat{\phi},\partial_\mu\hat{\phi})$$
$$= \hat{\pi}^\dagger(x)\,\hat{\pi}(x) + \vec{\nabla}\hat{\phi}^\dagger(x)\vec{\nabla}\hat{\phi}(x) + m^2\hat{\phi}^\dagger(x)\hat{\phi}(x)$$

durch Einsetzen der Lösung für $\hat{\phi}(x)$ ergibt sich so der Hamilton-operator

$$\hat{H} = \int d^3x\, \mathcal{H} \overset{\text{Ü}}{=} \int d^3p\, E_p \left[\tfrac{1}{2}(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}) + \tfrac{1}{2}(\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}})\right]$$
$$= \int d^3p\, E_p \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \delta^{(3)}(0)\right]$$

↑ unendliche Vakuumsenergie, Regularisierung s. Ü

- wenn wir wie im Harmonischen Oszillator einen Vakuumszustand $|0\rangle$ einführen (ist normiert $\langle 0|0\rangle = 1$) mit der Eigenschaft $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 = \hat{b}_{\vec{p}}|0\rangle \quad \forall \vec{p}$

so gilt folgende Interpretation:

- $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ (z.B. aus dem Vakuum $\hat{a}^\dagger_p |0\rangle$)

  $\hat{=}$ auslaufendes Teilchen

- $\hat{a}_{\vec{p}}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$

  $\hat{=}$ einlaufendes Teilchen

- $\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$ erzeugt ein Antiteilchen mit Impuls $\vec{p}$

  $\hat{=}$ auslaufendes Antiteilchen

- $\hat{b}_{\vec{p}}$ vernichtet ein Antiteilchen mit Impuls $\vec{p}$

  $\hat{=}$ einlaufendes Antiteilchen

dann sind
$$\boxed{\begin{aligned} N_{a\vec{p}} &= \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}} \\ N_{b\vec{p}} &= \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\,\hat{b}_{\vec{p}} \end{aligned}}$$
Besetzungszahl-op. f. Teilchen mit $\vec{p}$

" " f. Antiteilchen

$\Rightarrow$ beiden Teilchensorten tragen positiv zur Gesamtenergie $\hat{H}$ bei, d.h. es gibt keine negativen Energien: $\hat{H} = \int d^3p\; E_{\vec{p}} [N_{a\vec{p}} + N_{b\vec{p}} + \delta(0)]$

Erhaltungsgröße:

- wie wir gesehen haben ist der folgende Operator erhalten: $\frac{d}{dt}\hat{Q} = 0$

$$\hat{Q} = i\int d^3x\,[\hat{\phi}^\dagger(x)\,\partial_0\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x)\,\partial_0\hat{\phi}^\dagger(x)]$$
$$\overset{\text{ü}}{=} \int d^3p\left[\tfrac{1}{2}(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}) - \tfrac{1}{2}(\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}})\right]$$
$$= \int d^3p\,[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}_{\vec{p}}]$$

da Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzte Ladung haben ist die Gesamtladung erhalten.

- alle möglichen aus $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$ und $|0\rangle$ erzeugten Vielteilchenzustände bilden einen Hilbert-Raum: Fock-Raum

Lösung der Maxwell-Gleichungen

- $A^\mu(x)$ ist ein reelles, 4-komponentiges Vektorfeld
- wir suchen physikalische Lsg. mit 2 Freiheitsgraden, d.h.

wir wählen (z.B.) die Coulomb-Eichung

$$A^0(x) = 0, \quad \partial_\mu A^\mu(x) \overset{!}{=} \underbrace{\partial_i A^i(x)}_{} = 0$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgl. für $A^\mu(x)$: $\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) = 0}$

$\Rightarrow$ wir können 4 reelle $\overset{(\Rightarrow \hat{a} = \hat{b})}{\text{Lsg}}$ der KG-Gleichung mit $m=0$ benutzen,

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d\vec{p}^3}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_{\lambda=1,2,3,4} \varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p}) \left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{\dagger(\lambda)}_{\vec{p}} e^{+ip\cdot x} \right]$$

---

wobei $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p}) \in \mathbb{R}$ der Polarisationsvektor für die 4 Polarisationszust. λ ist.

Anschließend formulieren wir die Bedingungen der Coulomb-Eichung für $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$ (für andere Eichungen gelten andere Bed. an $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$).

$A^0(x) = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon^0_{(\lambda)}(\vec{p}) \equiv 0}$ $\forall \lambda$ und $\forall$ Impulse $\vec{p}$

$\partial_j A^j(x) = 0$, mit $\partial_j e^{\pm ip\cdot x} = \pm i p_j e^{\pm ip\cdot x}$ ergibt dies

$$\boxed{p_j \varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}\,\vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$$

d.h. $\vec{\varepsilon}_{(\lambda)}(\vec{p}) \perp \vec{p}$: transversale Polarisation des freien Photons

- $\exists$ 2 unabhängige Lsg zu $\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$, also z.B. für $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$ gilt

$\vec{\varepsilon}_{(1)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_2(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis

(sowie Linearkombinationen)

• die Feldoperatoren $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ werden unabhängig voneinander gewählt, d.h. sie erfüllen folgende Vertauschungsrelation

$$[\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\vec{p}'}] = \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$[\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(\lambda')}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}^{\dagger(\lambda)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{\dagger(\lambda')}_{\vec{p}'}]$$

• da $A^\mu(x) \in \mathbb{R}$ war ja $\hat{a} = \hat{b}$, d.h. es gibt kein unabhängiges $\hat{b}$ und damit kein Antiteilchen ($\nexists$ Antiphoton!)

d.h. $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Polarisation λ

$\hat{=}$ einlaufendes Teilchen

$\hat{a}^{(\lambda)\dagger}_{\vec{p}}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ u. Polarisation λ

$\hat{=}$ auslaufendes Teilchen

Vollständigkeitsrelation : Summe über alle Polarisationszustände:

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})\, \varepsilon^\nu_{(\lambda)}(\vec{p}) \;=?$$

z.B. wenn λ nicht gemessen wird u. über alle summiert wird

in der Coulomb-Eichung gilt (ij)

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p})\, \varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^{\,2}}$$

[N.B. $\exists$ konzeptuelle Probleme bei der kanonischen Quantisierung (QFT) von Maxwell sowie der Eichbedingung, s. z.B. Kap. 7. O. Nachtmann]