Lösung der Dirac-Gleichung

[O. Nachtmann Kap 4
N. Borghini III 3]

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$$

$\underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu}_{\not{\partial}}$

, $\Psi(x) \in \mathbb{C}^4$ 4-komponentige Vektor (4er Spinor)

- Wir suchen wieder nach Lsg in Form von ebenen Wellen

$$\Psi(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$$

mit $u(\vec{p})$ x-unabhängig

Spielt Rolle des Polarisations-vektors $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$ in Maxwell

- $i\partial_\mu e^{-ip\cdot x} = p_\mu e^{-ip\cdot x}$

$$\Rightarrow \boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p}) = (\not{p} - m)\, u(\vec{p}) = 0}$$

oder in Matrix-Darstellung $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$, $\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (p^0 - m)\mathbb{1}_2 & -p^k\sigma^k \\ p^k\sigma^k & (-p^0 - m)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \vec{0}$$

mit $u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$

$u_{A,B}$ 2er Spinoren

wobei $p^k\sigma^k = \sum_{k=1,2,3} p^k\sigma^k = \vec{p}\cdot\vec{\sigma}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (p^0 - m)\, u_A - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\, u_B \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\, u_A - (p^0 + m)\, u_B \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_A = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{(p^0 - m)}\, u_B\,, \quad u_B = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{(p^0 + m)}\, u_A \Rightarrow$$

$$u_A = \frac{1}{(p^{0\,2} - m^2)}\, p^k\sigma^k p^l\sigma^l\, u_A\,, \quad p^k p^l \sigma^k\sigma^l = \frac{1}{2} p^k p^l \underbrace{(\sigma^k\sigma^l + \sigma^l\sigma^k)}_{\{\sigma^k, \sigma^l\} = 2\delta^{kl}} = \vec{p}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}^{\,2}}{(p^{0\,2} - m^2)} = 1 \Leftrightarrow \underline{(p^0)^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2} \quad \boxed{p^0 = \pm E_{\vec{p}}}$$

rel. E & $\vec{p}$ Beziehung

- gesucht: Lsg für $u_A(\vec{p})$ und $u_B(\vec{p})$
- wie bei der Lsg der KG-Gleichung machen wir einen Ansatz mit $e^{\pm i p\cdot x}$ mit $p_\mu p^\mu - m^2 = 0$

* Teilchen (Lsg mit "positiver" Energie):

$u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$, $p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$

mit $(\not{p}-m)\, u(\vec{p}) \overset{!}{=} 0$ wegen $(\not{p}-m)(\not{p}+m) = p\cdot p - m^2$

Ansatz $u(\vec{p}) = C(p)\,(\not{p}+m)\, u_0$, $u_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ p^μ-unabhängig

$C(p)$ Normierung , $C \in \mathbb{R}$

wir wählen als Basis für die 2 unabhängigen Spinzustände

$\xi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \pm$

$$\boxed{u(\vec{p},s) = C(p)\,(\not{p}+m)\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}}$$

* Antiteilchen (Lsg mit "negativer" Energie):

$v(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x}$, nach der Substitution wie auf S. 27 $p^\mu \to -p^\mu$ haben wir $p^0 = +\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2} = E_{\vec{p}}$ auch hier

$\Rightarrow$ $v(\vec{p})$ erfüllt $(-\not{p}-m)\, v(\vec{p}) = 0$

Ansatz $v(\vec{p}) = C'(p)\,(\not{p}-m)\, v_0$, v_0 p^μ-unabh.

$C'(p) \in \mathbb{R}$ Normierung

wähle Basis $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$: $\boxed{v(\vec{p},s) = C'(\not{p}-m)\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow$ im Ruhesystem ($m \neq 0$) gilt: $\vec{p} = \vec{0}$, $p^0 = m$

d.h.: $$u(\vec{0}, s) = C \begin{pmatrix} (p^0 - m)\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \underbrace{(-p^0 + m)}_{= 0}\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = C\, 2m \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $$v(\vec{0}, s) = C' \begin{pmatrix} (\overset{= 0}{p^0 - m})\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & (-p_0 - m)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix} = -C' 2m \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$$

deshalb die Wahl der Basis mit $u_B = 0$ für $u(\vec{p})$ und $u_A = 0$ für $v(\vec{p})$

- ferner sind $u(\vec{p}, s)$ und $v(\vec{p}, s)$ orthogonal:

$$u^+ v = 0 = v^+ u$$ (denn $(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p \cdot p - m^2$ is skalar

Normierung – Wahl von $C(p)$ und $C'(p)$:

- diese hängt mit der Vollständigkeitsrelation (wie für die $\epsilon^\mu_{(\lambda)}$) unten sowie mit den Konventionen der Quantisierung der Felder (2. Quantisierung) zusammen.

$*$ Zu $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ ist $u^+ = (a^*, b^*, c^*, d^*)$ der Hermitesch konjugierte Spinor

und $\bar{u} = u^+ \gamma_0$ der Dirac-adjungierte Spinor

Folgende Wahl der Normierung erweist sich als nützlich

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}, s)\, u(\vec{p}, s') &= 2m\, \delta_{ss'} \\ \bar{v}(\vec{p}, s)\, v(\vec{p}, s') &= -2m\, \delta_{ss'} \end{aligned}}$$ und $\bar{u} v = 0 = \bar{v} u$

$$\overset{\text{ü}}{\Rightarrow} \quad C(p) = -C'(p) = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \quad \text{und} \quad u^+ u = v^+ v = 2E_{\vec{p}}\, \delta_{ss'}$$

Vollständigkeitsrelation

- Anstelle einer Summe über alle Polarisationszustände in der Maxwell Gl. benötigen wir hier eine Summe über alle Spinzustände:

es gilt: $u_\alpha(\vec{p},s)\,\bar{u}_\beta(\vec{p},s) = C^2 (\not{p}+m)_{\alpha\kappa} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\kappa (\xi_s^+\, 0)_\lambda (p_\mu \gamma^\mu + m)^+_{\lambda\rho} \gamma^0_{\rho\beta}$

Komp. α des 4er Spinors

außerdem $\begin{pmatrix} \xi_+ \\ 0 \end{pmatrix}_\kappa (\xi_+^T\, 0)_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\kappa (1\,0\,0\,0)_\lambda = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}_{\kappa\lambda}$

$\Rightarrow \sum_{s=\pm} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\kappa (\xi_s^T, 0)_\lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\kappa\lambda}$

$\Rightarrow$ Vollständigkeitsrelation:

da $\gamma^{\mu+}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$

$\sum_s u_\alpha(\vec{p},s)\,\bar{u}_\beta(\vec{p},s) \stackrel{!}{=} \frac{1}{p^0+m} \left[(\not{p}+m) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0 (\not{p}+m) \right]_{\alpha\beta}$

$= \frac{1}{p^0+m} \left[\begin{pmatrix} p_0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p_0+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -p_0+m \end{pmatrix} \right]_{\alpha\beta}$

$(\vec{p}\vec{\sigma})^2 = \frac{p^\kappa p^\varrho}{2}\{\sigma^\kappa,\sigma^\varrho\} = p^\kappa p^\kappa = \vec{p}^{\,2}$

$\stackrel{!}{=} \frac{1}{p^0+m} \left[\begin{pmatrix} p_0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -p_0+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0+m & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha\beta} = \frac{1}{p^0+m} \begin{bmatrix} (p_0+m)^2 & -\vec{p}\vec{\sigma}(p_0+m) \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma}(p_0+m) & -\vec{p}^{\,2} \end{bmatrix}_{\alpha\beta}$

$\stackrel{!}{=} \cancel{\frac{1}{p^0+m}} \begin{bmatrix} (p_0+m) & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -p_0+m \end{bmatrix}_{\alpha\beta} \cancel{(p_0+m)}$ da $\vec{p}^{\,2} = m^2 - p_0^2 = (m-p_0)(m+p_0)$

d.h. $\boxed{\sum_s u_\alpha(\vec{p},s)\,\bar{u}_\beta(\vec{p},s) = (\not{p}+m)_{\alpha\beta}}$; genauso zeigt man

daß $\boxed{\sum_s v_\alpha(\vec{p},s)\,\bar{v}_\beta(\vec{p},s) = (\not{p}-m)_{\alpha\beta}}$

Feldquantisierung und physikalische Interpretation

- genau wie im Falle des Skalarfeldes ϕ oder Vektorfeldes A^μ ist die allgem. Lsg. der Dirac-Gl. wieder eine Superposition der Lsg zu festem p^μ. Die Interpretation als Teilchen und Anti-~ mit Hilfe von Erzeugern und Vernichtern führt zu einem nach unten beschränkten Hamilton-Op.:

Dirac-Feldoperator

$$\hat{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}} \sum_{s=\pm} \left[\hat{a}^{(s)}_{\vec p}\, u(\vec p, s)\, e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^{\dagger(s)}_{\vec p}\, v(\vec p, s)\, e^{+ip\cdot x} \right]$$

$$\hat{\bar\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}} \sum_{s=\pm} \left[\hat{a}^{\dagger(s)}_{\vec p}\, \bar u(\vec p, s)\, e^{ip\cdot x} + \hat{b}^{(s)}_{\vec p}\, \bar v(\vec p, s)\, e^{-ip\cdot x} \right]$$

Hamilton-Operator

mit $\dfrac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_0 \Psi} = \Pi_\Psi = i\bar\Psi\gamma^0 = i\Psi^\dagger$ ergibt sich $\mathcal{H} = \bar\Psi[-i\gamma^j\partial_j + m]\Psi$

und damit $$\hat H = \ldots = \int d^3p\, E_{\vec p} \sum_{s=\pm} \left[\hat a^{\dagger(s)}_{\vec p} \hat a^{(s)}_{\vec p} - \hat b^{(s)}_{\vec p} \hat b^{\dagger(s)}_{\vec p} \right]$$

Vertauschungsrelationen $\rightarrow$ Spin-Statistikrelation

- außer der von unten beschränkten Energie würden wir erwarten, das die Anwendung eines Erzeugers (Vernichters) auf einen Zustand dessen Energie erhöht (erniedrigt):

$$[H, \hat a^{\dagger(s)}_{\vec k}] = H \hat a^{\dagger(s)}_{\vec k} - \hat a^{\dagger(s)}_{k} H \overset{!}{=} + E_{\vec k}\, \hat a^{\dagger(s)}_{\vec k} \Leftrightarrow H \hat a^{\dagger(s)}_{\vec k} = \hat a^{\dagger(s)}_{k}(E_{\vec k} + H)$$

$$\hat a^{(s)}_{\vec k} \qquad\qquad - E_{\vec k}\, \hat a^{(s)}_{\vec k}$$

und genauso für Anti-Teilchen

Wenn wir genauso wie für das Skalarfeld (Spin 0) und das Vektorfeld A^μ (Spin 1) – beides sind Bosonen – quantisieren:

$$\left[\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{(s')\dagger}_{\vec{p}'}\right] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'}$$
$$b \qquad b^\dagger$$

klappt dies nicht (für die b's)!

$\Rightarrow$ wir müssen Anti-Kommutatorrelationen $\{A,B\} = AB + BA$

verwenden, um ein konsistentes Verhalten zu bekommen.

$$\boxed{\begin{aligned}\left\{\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{a}^{\dagger(s')}_{\vec{p}'}\right\} &= \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'}\\ \left\{\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{b}^{\dagger(s')}_{\vec{p}'}\right\} &= \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta^{ss'}\end{aligned}}$$

der Rest verschwindet $\left\{\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}, \hat{b}^{(s')}_{\vec{p}'}\right\} = 0 = \ldots$

d.h. die Erzeuger und Vernichter von Dirac-Teilchen und Dirac-Anti-Teilchen antivertauschen. Dies gilt allgemein für Fermionen (Spin-Statistik-Theorem), d.h. Teilchen mit halbzahligem Spin

$$\Rightarrow \left[\hat{H}, \hat{b}^{\dagger(s)}_{\vec{k}}\right] = \ldots = +E_{\vec{k}}\,\hat{b}^{\dagger(s)}_{\vec{k}} \quad \text{usw}$$

$\uparrow$ benutze $\{\}$ dann $[AB,C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B$

und $$\boxed{\hat{H} = \int d^3p\, E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm} \left[\hat{a}^{\dagger(s)}_{\vec{p}}\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}} + \hat{b}^{\dagger(s)}_{\vec{p}}\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}} - \delta^{(3)}(\vec{0})\right]}$$

mit $\hat{a}^{(s)}_{\vec{p}}$ einlaufendes Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Spin s

$\hat{a}^{\dagger(s)}_{\vec{p}}$ aus-

$\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}$ ein- Anti-

$\hat{b}^{(s)}_{\vec{p}}$ aus- Anti-