Einheiten:

- in der Teilchenphysik werden alle Größen durch elektron-Volt eV = Zunahme der kin. Energie des durch eine Spannung von 1V beschleunigten Elektrons

$keV = 10^3 eV$, $MeV = 10^6 eV$, $GeV = 10^9 eV$, $TeV = 10^{12} eV$

dabei werden $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1$ und $c = 1$ gesetzt (natürliche Einheiten)
($\Leftrightarrow$ klass. Limites $c \to \infty$ bzw $\hbar \to 0$ nicht möglich in diesen Einheiten!)

Wie geht das?

SI System (MKSA = Meter - Kg - Sekunde - Ampere System

alle physikalischen Größen werden durch Basisgrößen u. deren Dimension ausgedrückt: Masse [M] in kg
Länge [L] in m
Zeit [T] in s
+ Ladung [A] ...

z.B. Energie in Joule $J = kg \frac{m^2}{s^2}$, Geschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$

Drehimpuls $j = kg \cdot \frac{m^2}{s}$

* stattdessen können wir andere Basisgrößen wählen solange diese unabhängig sind, also

Energie in eV, Geschwindigkeiten in c, Drehimpulse in $\hbar$

$\Rightarrow$ Länge $= \frac{\hbar c}{eV}$, Masse $= \frac{eV}{c^2}$, Zeit $= \frac{\hbar}{eV}$, Impulse $= \frac{eV}{c}$

wenn wir nun $\hbar = 1 = c$ setzen sind alle diese Größen in eV ausgedrückt!

- Ladungen werden in Einheiten der Elementarladung e^- gemessen
Coulomb: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$, Heaviside-Lorentz: $\varepsilon_0 = 1$ ($\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \Rightarrow \mu_0 = 1$)

(• Temperaturen werden in $\frac{eV}{k_B}$ gemessen, mit $k_B = 1$)

Beispiele

- H-Atom: Bindungsenergie = Ionisations $\sim$ 13,6 eV

$\ll (m_{e^-} = 0{,}5\ \text{MeV}) + (m_p = 938\ \text{MeV})$ Summe d. Massen der Konstituenten

- Proton: $p = uud$

$2 \cdot (m_u = 2{,}3\ \text{MeV}) + 1 \cdot (m_d = 4{,}8\ \text{MeV})$

$\ll (m_p = 938\ \text{MeV})$

$\Rightarrow$ überwiegender Anteil der Protonmasse ist Bindungsenergie

Folgerungen

* elektromagnetische WW $\ll$ starke WW

* die Masse der Quarks (sowie der Leptonen) wird durch den Higgsmechanismus erzeugt. Offenbar spielen diese für m_p eine untergeordnete Rolle: auch für $m_q = 0$ ist das Proton sehr massiv.

$\to$ die Entdeckung des Higgs-Bosons erklärt nicht "den Ursprung der Masse des Universums"
(siehe außerdem dunkle Materie)

Spezielle Relativitätstheorie

- die beruht auf folgenden Postulaten:
  - die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich (deshalb können wir die Konvention $c=1$ wählen)
  - die physikalischen Gesetze nehmen in allen Bezugssystemen die gleiche Form an

Vierervektorschreibweise

Ortsvektor $x^\mu, \mu = 0,1,2,3$ mit $x^0 = \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{c}t$, $\underbrace{x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z}_{x^i,\ i=1,2,3}$

$= (t, \vec{x})$

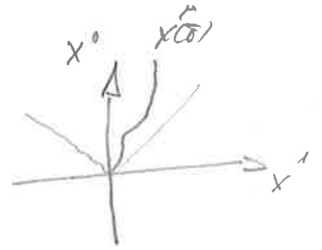
Viererimpuls p^μ, $\mu = 0,1,2,3$ mit $p^0 = E$, $p^1 = p_x$, $p^2 = p_y$, $p^3 = p_z$

$= (E, \vec{p})$

x-Komp des Impulses im kartesischen $\mathbb{R}^3$

Ableitung $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

Vierergeschwindigkeit



$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

mit $x^\mu(\tau)$ = Weltlinie eines Teilchens

τ = Eigenzeit eines Teilchens (t im Ruhesystem)

- im Laborsystem $u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$, $v = \vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

* der Viererimpuls bleibt immer erhalten (z.B. $A, B \to C, D$: $p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$)

die **Metrik** $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, "$\eta^2 = \mathbb{1}$": $\underline{\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma}$ Kronecker delta

- erlaubt untere Indizes zu def $\boxed{x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu}$, mit Einsteins Summenkonvention über gleiche Indizes (u über lateinische)

$= \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\nu$

Skalarprodukt (nicht positiv definit)

$$x \cdot y \equiv x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu y^\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

"Norm" eines Vektors $x^2 = x \cdot x = x_\mu x^\mu = x^{0\,2} - (\vec{x})^2$; $x^2 = 0$: Licht-kegel

D'Alembert-operator (Box) $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

(und $\partial_\mu x^\mu = 4$, $\eta^\mu{}_\mu = 4$)

* das Skalarprodukt ist invariant, d.h. in allen Inertialsystemen gleich

• der Wechsel von einem auf ein anderes Inertialsystem wird durch die Gruppe der Lorentztransformationen vermittelt:

* Gruppe: abgeschlossen, erfüllt Assoziativgesetz, es ex. Einselement und zu jedem Gruppenelement ein Inverses.

Lorentztrafo (diese sind linear!)

$$\boxed{x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu} \quad , \Lambda^\mu{}_\nu \text{ 4x4 Matrix}$$

diese läßt das Skalarprodukt zwischen 2 bel. Vierervektoren invariant

$$x' \cdot y' = \eta_{\mu\nu} x'^\nu y'^\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma \Lambda^\mu{}_\rho y^\rho$$

$$\overset{!}{=} \eta_{\rho\sigma} x^\sigma y^\rho = x \cdot y$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\mu{}_\rho} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \eta_{\rho\sigma} = (\Lambda^T \eta \Lambda)_{\rho\sigma} = \Lambda_\rho{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \quad \text{Matrixschreibweise}$$

$$\Rightarrow \quad \det \eta = \det \Lambda^T \eta \Lambda = (\det \Lambda)^2 \det \eta$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\det \Lambda = \pm 1}$ (+). Aus der $\varrho = 0 = \sigma$ Komponente von (*)

$$\Rightarrow 1 = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 \Lambda^\mu{}_0 = \underbrace{(\Lambda^0{}_0)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$, d.h. $\underline{\Lambda^0{}_0 \geq +1}$ ($\uparrow$) oder $\underline{\Lambda^0{}_0 \leq -1}$ ($\downarrow$)

- $\exists$ 4 verschiedene Lösungen dazu, d.h. die Lorentztrafos $\mathcal{L}$ enthalten 4 (disjunkte) Sektoren $\mathcal{L}^\uparrow_+, \mathcal{L}^\downarrow_+, \mathcal{L}^\uparrow_-, \mathcal{L}^\downarrow_-$

(so wie die orthogonalen Matrizen O im $\mathbb{R}^2$, $O(2)$ in eigentliche Drehungen und Drehspiegelungen zerfallen, weil $\det O = \pm 1$)

- wie wir gleich sehen werden sind Drehungen (und Spiegelungen) im $\mathbb{R}^3$ in den Lorentztrafos enthalten

<u>eigentliche Lorentztrafo</u>: $\mathcal{L}^\uparrow_+$ mit $\det \Lambda = +1$ und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$

bestimmte Trafos haben eigene Namen:

<u>Raumspiegelung</u>
= <u>Paritätstrafo P</u>
(Punktspiegelung am Ursprung)

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^\uparrow_- : \quad x^0 \to x^0, \quad x^i \to -x^i \quad i = 1,2,3$$

<u>Zeitumkehr</u> T

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^\downarrow_- \quad x^0 \to -x^0, \quad x^i \to +x^i$$

($\Rightarrow \Lambda_P \Lambda_T \in \mathcal{L}^\downarrow_+$)

- neben der Metrik $\eta_{\mu\nu}$ ist auch der vollständig <u>antisymmetrische</u> <u>ε-Tensor</u>

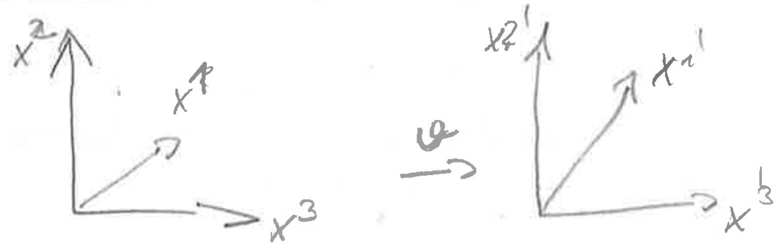
$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{f. Indizes 0123 u. gerade Permutationen} \\ -1 & \text{f. ungerade Perm. von 0123} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unter $\mathcal{L}^\downarrow_+$ u. $\mathcal{L}^\uparrow_+$ invariant da gilt

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\varrho \Lambda^\delta{}_\sigma = \det \Lambda \cdot \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$$ (brauchen wir für Maxwell)

Beispiele für (eigentliche) Lorentztransformationen:

boost in x^3 - Richtung



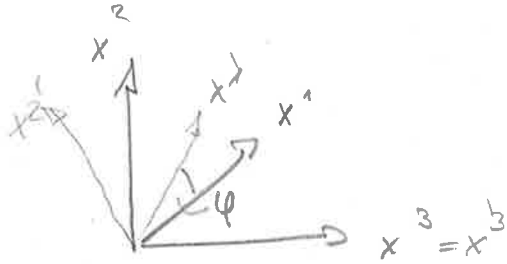
$$x'^0 = \gamma(x^0 - x^3 v)$$
$$x'^{1,2} = x^{1,2}$$
$$x'^3 = \gamma(x^3 - x^0 v) \quad , \text{ mit } \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \equiv \cosh(\xi) \; , \; \xi \in [0, \infty) \text{ nicht kompakt}$$
$$\hat{=}\; v = 0, 1$$

und $v\gamma = \sinh(\xi)$

so daß $\cosh^2(\xi) - \sinh^2(\xi) = 0$, ξ Rapidität

$$\Rightarrow \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\xi & 0 & 0 & -\sinh\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\xi & 0 & 0 & \cosh\xi \end{pmatrix} \quad , \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 \; , \; \det\Lambda = +1 \; \checkmark$$

sieht fast aus wie eine Drehung:



hier um x^3 mit Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$
(kompakt)

$$x'^0 = x^0 \; , \; x'^3 = x^3 \; , \; x'^1 = x^1\cos\varphi + x^2\sin\varphi$$
$$x'^2 = -x^1\sin\varphi + x^2\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda^0{}_0 \geq 1 \; , \; \det\Lambda = +1$$