Quantenmechanik

- klassische Mechanik : $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ Gesamtenergie = kinetische + potentielle Energie

$\rightarrow$ Hamilton Operator in der QM $\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})}$

mit kanon. Vertauschungsrelation $[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\,\delta_{kl}$ (aus Poisson-Klammer $\rightarrow$ Kommutator)

- $\hat{H}$ ist ein Operator der auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ normierbarer Zustände $|n\rangle$ wirkt.

Energieeigenzustände $\boxed{\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle}$, $n = 0, 1, 2..$

mit Grundzustand $|n=0\rangle$ u. zu Energie E_0.

I.A. bilden diese Eigenzustände eine Basis von $\mathcal{H}$. $= \text{span}\{|n\rangle, n = 0,1,..\}$

- eine Darstellung der Operatoren im Ortsraum ist

$$\hat{x}_l \rightarrow x_l \quad , \quad \hat{p}_l \rightarrow -i\,\partial_l \quad \left(= \frac{\partial}{\partial x_l}\right)$$

mit Wellenfunktion $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, $\psi^+(x) = \langle\psi|x\rangle$

$\Rightarrow$ bestimme $E_n, |n\rangle$ aus $\boxed{\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\vec{x})\right]\psi(x) = E\,\psi(x)}$

- im Bsp. H-Atom mit V = Coulomb hat diese Diff. Gl. nur diskrete Lösungen für E (unterhalb d. Ionisationsenergie)

- Bsp Harmonischer Oszillator : Besetzungszahl darstellung

$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2}$, statt $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ u. Lsg mit Hermite Polynomen

wähle $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a})$, $\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a})$

mit den Leiteroperatoren $\hat{a}$ Vernichter, $\hat{a}^+$ Erzeuger $\hookrightarrow [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$

$\Rightarrow$ $\hat{H}$ läßt sich elegant durch den

<u>Besetzungszahloperator</u> $\underline{\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}}$ darstellen:

$$\underline{\hat{H} = \omega\left(\hat{N} + \tfrac{1}{2}\right)}$$ mit

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ ↘ absteigen

($\Rightarrow$ $\hat{a}|n=0\rangle = 0$)

$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ ↗ aufsteigen

* dasselbe Prinzip der Auf- u. Absteigeoperatoren werden wir <u>später</u> zur Lösung der relativistischen Wellengleichungen verwenden

* <u>Comptonwellenlänge</u> $\lambda = \frac{h}{mc} = \frac{2\pi}{m_{(e^-)}}$ $(\cdot e^-)$; Teilchen verhält sich QM auf diese Längenskala

- <u>Störungstheorie</u> in der QM:

$$\boxed{\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}}\,,\quad g \ll 1\,,\quad \hat{H}_0 \text{ Hamilton-Op des freien Teilchens,}$$

wobei $\hat{H}_0|n\rangle^{(0)} = E_n^{(0)}|n\rangle^{(0)}$ bekannt sein sollen (d.h. $E_n^{(0)}, |n\rangle^{(0)}$)

Ansatz Reihenentwicklung:

$$E_n = E_n^{(0)} + g E_n^{(1)} + O(g^2) \Rightarrow E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n|\hat{V}|n\rangle^{(0)}$$

i.A. kennen wir die Eigenzustände von $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ <u>nicht!</u>

Wie auch später in der QFT müssen wir versuchen, alles durch die Eigenzustände $|n\rangle^{(0)}$ des freien Teilchens auszudrücken

- <u>Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung</u> (noch nicht relativistisch!)

$$\boxed{i\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle}\,.$$

Für Eigenzustände $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ gilt dann $|n(t)\rangle = e^{-iE_n t}|n(t=0)\rangle$ als Lösung i.A. kann man eine formale Lösung hinschreiben f. bel. Zustände

$$\boxed{|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}\,|\psi(0)\rangle_S}\,,$$ d.h. die Zustände sind

t-abhängig: Schrödinger-Bild (S)

und für Erwartungswerte von (i.A. zeitunabh.) Operatoren $\hat{A}$ (wie $\hat{H}$)

gilt $\langle A_S\rangle = {}_S\langle\psi(t)|\,\hat{A}_S\,|\psi(t)\rangle_S$

Heisenberg-Bild (H)

· hier wird die Zeitabhängigkeit von den Zuständen in die Operatoren verlegt: $$\boxed{\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\,\hat{A}_S\,e^{-i\hat{H}t}}$$ (i.A. gilt $[\hat{H},\hat{A}_S]\neq 0$)

$$\Rightarrow \quad i\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t),\hat{H}]$$

mit $\langle\hat{A}_H(t)\rangle = {}_S\langle\psi(0)|\,\hat{A}_H(t)\,|\psi(0)\rangle_S = \langle\hat{A}_S\rangle$

"mix": Dirac-Bild (I) (interaction): dies ist besonders f. WW $\boxed{\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}}$ geeignet, da die "triviale" Zeitentwicklung des freien $\hat{H}_0$ abgespalten wird:

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= e^{i\hat{H}_0 t}\,|\psi(t)\rangle_S \\ \hat{A}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{A}_S\,e^{-i\hat{H}_0 t} \\ \hat{V}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{V}\,e^{-i\hat{H}_0 t} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t}[-\hat{H}_0 + \hat{H}]\,|\psi(t)\rangle_S = g\hat{V}_I(t)\,|\psi(t)\rangle_I} \quad ⓐ$$

Zeitentwicklung im Dirac-Bild (I) nur durch WW gegeben

und es gilt $$i\frac{d}{dt}\hat{A}_I(t) = [\hat{A}_I(t),\hat{H}_0]$$

- im Dirac-Bild können wir den <u>Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_I(t,t_0)$</u>

def. durch $|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle_I$

er bildet ab: ψ_I zu t_0 auf ψ_I zur Zeit t

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_I(t,t_0) = g\,\hat{V}_I(t)\,\hat{U}_I(t,t_0)} \quad \text{aus } ①$$

mit Anfangsbedingung $\hat{U}_I(t_0,t_0) = \underline{\mathbb{1}}$ Identität

Relativistische Quantenmechanik freier Teilchen

* die zeitabhängige Schrödingergl. eines freien Teilchens

$$i\partial_t \Psi(x,t) = -\frac{\nabla^2}{2m}\Psi(x,t) = E\,\Psi(x,t)$$

kann nicht in verschiedenen Bezugssystemen die gleiche Form annehmen, da sie nicht wie ein Lorentz-Vektor (o. Skalar) transformiert:

1. Ordnung in ∂_t, 2. Ordnung in ∂_x

$\Rightarrow$ Lorentz-kovariante Gleichung 1. Ordnung : Dirac

2. Ordnung : Klein-Gordon, Maxwell

Die Klein-Gordon Gleichung (Spin-0 Teilchen), z.B. Pion, Higgs

Schrödi: nicht relativistische Energie-Impuls Relation $E = \frac{p^2}{2m}$

hier $p_\mu p^\mu = m^2$ für massive Teilchen ($= p_\mu p^\mu$ im Ruhesystem)

$$\Leftrightarrow \quad E^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2 = 0$$

relativistische Darstellung von $E, \vec{p}$ als Operatoren im Ortsraum

$$\hat{E} \to i\partial_t, \quad \hat{\vec{p}} \to -i\vec{\nabla} \quad \text{bzw} \quad \boxed{\hat{p}_\mu \to i\partial_\mu}$$

$(p^\mu = (E, +p_x, +p_y, +p_z),\ p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z))$

$$\Rightarrow \boxed{[-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2]\,\phi(\vec{x},t) = 0} \quad \text{Klein-Gordon Gleichung}$$

(Schrödinger hat diese Gl. zugunsten der nach ihm benannten Gl. verworfen, da $|\phi(x,t)|^2$ keine Erhaltungsgröße ist (stattdessen s. 102), wie in der QM gefordert. Die KG beschreibt auch nicht das Elektron e^-, denn dessen Spin ist $\frac{1}{2} \neq 0$)