Relativistische Quantenmechanik freier Teilchen

* die zeitabhängige Schrödingergl. eines freien Teilchens

$$i\partial_t \psi(x,t) = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi(x,t) = E\,\psi(x,t)$$

kann nicht in verschiedenen Bezugssystemen die gleiche Form annehmen, da sie nicht wie ein Lorentz-vektor (o. Skalar) transformiert:

1. Ordnung in ∂_t, 2. Ordnung in ∂_x

$\Rightarrow$ Lorentz-kovariante Gleichung 1. Ordnung : Dirac

2. Ordnung : Klein-Gordon, Maxwell

Die Klein-Gordon Gleichung (Spin-0 Teilchen), z.B. Pion, Higgs

Schröd.: nicht relativistische Energie-Impuls Relation $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

hier $\boxed{p_\mu p^\mu = m^2}$ für massive Teilchen ($= p_\mu p^\mu$ im Ruhesystem)

$$\Leftrightarrow \quad E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0$$

relativistische Darstellung von $E, \vec{p}$ als Operatoren im Ortsraum

$\hat{E} \to i\partial_t$, $\hat{\vec{p}} \to -i\vec{\nabla}$ bzw $\boxed{\hat{p}_\mu \to i\,\partial_\mu}$

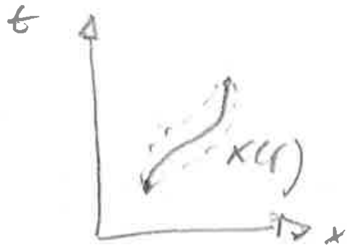
$(p^\mu = (E, +p_x, +p_y, +p_z)$, $p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z))$

$$\Rightarrow \boxed{[-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2]\,\phi(\vec{x},t) = 0} \quad \text{Klein-Gordon Gleichung}$$

(Schrödinger hat diese Gl. zugunsten der nach ihm benannten Gl. verworfen, da $\int |\phi(x,t)|^2$ keine Erhaltungsgröße ist (stattdessen s. Ü02), wie in der QM gefordert. Die KG beschreibt auch nicht das Elektron e^-, denn dessen Spin ist $\frac{1}{2} \neq 0$)

Lagrange-Formalismus für Felder

für Punktteilchen (in 1D) $x(t)$, $\dot{x}(t) = \partial_t x(t)$



Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x}; \cancel{t})$
i.A.

Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, \dot{x})$, Bewegungsgl.

aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung: Variation $x(t) \to x'(t) = x(t) + \delta x(t)$
mit festem Rand $\delta x(t_1) = 0 = \delta x(t_2)$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x} L - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0}$$

* wir betrachten nun statt

Punktteilchen $x(t) \to$ Felder $\phi(x^\mu) (\equiv \phi(x))$ die von Koordinaten

$t \to x^\mu = (x^0, x^i)$ im Minkowskiraum abhängen

unabhängig

Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \cancel{x^\mu})$ Funktion von $\phi, \partial\phi$
i.A.

Lagrange-Funktion $L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int_V d^3x\, \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ Funktional von $\phi, \partial\phi$.

Wirkung $S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int_{\Omega} d^4x\, \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$
$\Omega = [t_1, t_2] \times V$

Bewegungsgleichungen (z.B. KG) aus Variationsprinzip:

$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$

* i.A. kann man auch die Koordinaten variieren $x^\mu \to x'^\mu$, z.B. für $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$, $a^\mu = $ const führt dies zur Viererimpulserhaltung

* $\phi(x)$ kann Indizes tragen, z.B. $\phi(x) = \phi^{(1)}(x) + i\phi^{(2)}(x)$ komplexes Skalarfeld
(wenn mehrere Felder) $\phi^{(1,2)}(x) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \to \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\partial_\mu\phi) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$\Rightarrow \Delta S = S[\phi'] - S[\phi] = \int_\Omega d x^4 \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\partial_\mu\phi) + \dots\right]$$

partielle = Integration
$$\int_\Omega d x^4 \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right]\delta\phi(x) + \underbrace{\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\phi}_{=0} + \dots$$

$\Delta S = 0 \Rightarrow$
$\forall\,\delta\phi$
$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} = 0}$$ Euler-Lagrange f. Felder

zurück zur Klein Gordon-gl:

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)}$$, für $\phi(x) \in \mathbb{R}$

ist ein Lorentzskalar, d.h. in allen System gleich

mit EL-Gl. $0 = \frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{KG}}{\partial\partial_\mu\phi} = -\frac{1}{2}m^2 2\phi(x) - \partial_\mu\left(\frac{\partial}{\partial_\mu\phi}\,\underbrace{\frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\,\partial_\sigma\phi}_{\rho=\mu}\right)$

$$\Leftrightarrow\ -m^2\phi(x) - \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi + \frac{1}{2}\eta^{\rho\mu}\partial_\rho\phi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{-\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi(x) = 0}\ ,\quad \partial_\mu\partial^\mu = +\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$$

KG

* die Bewegungsgl. ist selber ein Lorentzskalar.

Noether Theorem:

$\exists$ kontinuierliche Symmetrie $\Leftrightarrow$ $\exists$ erhaltener Strom j^μ u. Ladung Q

$\neq$ (P,T)

* geht in beide Richtungen!

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad Q = \int d x^3 j^0$$

(Beweis z.B. Skript. Symmetrien in der Physik, lecture02.pdf)

Die Dirac Gleichung (Spin $\frac{1}{2}$) z.B. Elektronen, Quarks u.a.

Ziel: relativistische Gleichung 1. Ordnung

Idee Diracs: faktorisiere $\underline{p_\mu p^\mu - m^2 = 0}$, $p^\mu = (E, \vec{p})$

(für $\vec{p} = \vec{0}$ einfach: $(p^0)^2 - m^2 = (p^0 - m)(p^0 + m) = 0 \Rightarrow p^0 = \pm m$)

$\vec{p} \neq \vec{0}$: Ansatz

$$p_\mu p^\mu - m^2 = (\beta^s p_s - m)(\gamma^\lambda p_\lambda + m)$$, mit β^s, γ^s, $s = 0,1,2,3$ zu bestimmenden Konstanten

<u>Koeffizienten vergleich</u>:

i) $p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = \beta^s \gamma^\lambda p_s p_\lambda$, ii) $m p_s (\beta^s - \gamma^s) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta^s = \gamma^s}$
$\forall m, p_s$

$\Rightarrow$ i): $(p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2$

$$\stackrel{!}{=} (\gamma^0)^2 (p_0)^2 + (\gamma^1)^2 (p_1)^2 + (\gamma^2)^2 (p_2)^2 + (\gamma^3)^2 (p_3)^2$$

$$+ p_0 p_1 (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0) + p_0 p_2 (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0) + p_0 p_3 (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)$$

$$+ p_1 p_2 (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1) + p_1 p_3 (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1) + p_2 p_3 (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)$$

d.h. ⊛ $(\gamma^0)^2 = +1$, $(\gamma^j)^2 = -1$ $j = 1,2,3$, $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \overbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}^{\text{Antikommutator}} = 0$
für $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu = 0,1,2,3$

$\nexists$ reelle Lsg für γ^μ wegen

$\exists$ komplexe Lsg für γ^μ, z.B. $\gamma^k = \pm i$ $k = 1,2,3$, $\gamma^0 = \pm 1$, da dann $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \underbrace{2\gamma^\mu\gamma^\nu}_{\neq 0}$

$\rightarrow$ Diracs Idee: wähle <u>Matrizen</u> γ^μ die dieses erfüllen, da diese i.A. nicht kommutieren

d.h. suche Lsg zu $\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}}$ ⊛

Darstellung als 2 x 2 Matrizen ?

* die Pauli-Matrizen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

erfüllen zwar $\underline{\{\sigma_k, \sigma_l\} = 2\delta_{kl}}$

* zusammen mit der Identität $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$ spannen sie alle Hermitschen 2x2 Matrizen auf. Aber die Wahl von $I \equiv \gamma^0$ führt zu $\{I, \sigma_k\} = 2\sigma_k \neq 0$

Darstellung als 4 x 4 Matrizen!

die folgende Standard Darstellung $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt (*)

$\Rightarrow$ wir verlangen nun $\boxed{\gamma^\mu p_\mu - m = 0}$ (oder $\gamma^\mu p_\mu + m = 0$ ist $\Leftrightarrow$, s.u.)

statt $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$. Letzteres folgt dann, d.h. Lsg von Dirac löse auch KG

* mit der Operatordarstellung im Ortsraum wie auf S. 18

$\hat{p}_\mu \to i\partial_\mu$ ergibt sich $\boxed{(i\underbrace{\gamma^\mu \partial_\mu}_{\equiv \not{\partial}} - m)\Psi(\vec{x},t) = 0}$ Dirac Gleichung

wobei $m = m\,\mathbb{1}_{4\times4}$ zu verstehen ist, und $\Psi(x)$ ein

4-komponentiger Spaltenvektor $\left(\right)$ ist. Dieser ist i.A. komplex.

- Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen haben 2 Freiheitsgrade spin up, down!
- Ψ hat 4, d.h. beschreibt Teilchen und Antiteilchen

* Dirac hatte zunächst vermutet (1927), dass diese Gl e^- als Teilchen und p als Antiteilchen beschreibt, d.h. alle damals bekannten Elementarteilchen (n wurde 1932 gefunden). Nun ist $m_p \approx 2000 \cdot m_e$ es gibt hier aber nur eine Masse! (Die von Teilchen u. Antiteilchen sind exakt gleich! $m_{e^+} = m_{e^-}$)

[Darstellungen in einer ungeraden Dimension, z.B. 3×3?

$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$, bilde det, $\det(-\mathbb{1}) = (-1)^D$

$\Rightarrow \det(\gamma^\mu)\det(\gamma^\nu) = (-1)^D \det(\gamma^\mu)\det(\gamma^\nu)$

wenn wir verlangen daß $\det[\gamma^\mu] \neq 0 \; \forall \mu = 0,1,2,3 \Longrightarrow D = 2n$, $n = 1,2,\ldots$]

Lagrange-Dichte des Dirac Spinors

Um eine invariante Lagrangefunktion zu erhalten, deren Bewegungsgl. die Dirac-Gl. ist, benötigen wir noch zu $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ $\psi^+ = (a^*, b^*, c^*, d^*)$. Wie sich zeigen läßt ($\to$ Ü) erfüllt $\bar\psi = \psi^+\gamma_0$ die Gleichung $\underline{\bar\psi(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0}$ wobei $\overleftarrow{\partial}_\mu$ nach links wirkt

Damit lautet

$$\boxed{\mathcal{L}_D = \bar\psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)}$$

die Lagrange-Fkt zur Dirac-Gl.

* hierbei werden $\bar\psi(x)$ und $\psi(x)$ als unabhängige Felder betrachtet (wie zuvor $\phi(x)$ und $\phi^*(x)$)

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gl. $\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)}\right) = 0} \overset{Ü}{\Longleftrightarrow}$ Dirac Gl. für ψ und $\bar\psi$

- der dazugehörige erhaltene Strom ist $j^\mu(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße Ü