


⇒ die erhaltene Ladung ist

$$\hat{Q} = \int d^3x \frac{1}{\Psi_0} \Psi_0^\dagger \Psi = \int d^3p \sum_{s=\pm} \left[ a_{\vec{p}}^{1+(s)} a_{\vec{p}}^{1(s)} - b_{\vec{p}}^{1+(s)} b_{\vec{p}}^{1(s)} \right]$$

## Helizität:

Die Helizität eines Dirac-Spinors  $\Psi$  entspricht dem Konzept der Polarisation eines Photons: Helizität  $h=2$ komponente des Spins  $s$  in Bewegungsrichtung von  $\Psi$ :

hier   $s = +\frac{1}{2} \Rightarrow h = +1$

genauer:

$\vec{e}_p = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$  ist der Einheitsvektor in Bewegungsrichtung ( $\vec{p} \neq \vec{0}$ )

Helizitätsop  $h(\vec{p}) \equiv \vec{e}_p \cdot \vec{\Sigma}$ ,  $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

Spin entlang  $\vec{e}_p$ :  $S_{\vec{e}_p} = \frac{1}{2} h(\vec{p})$

Eigenschaften:  $P_{\pm}^{(h)} = \frac{1 \pm h}{2}$  sind Projektionsoperatoren

da  $h^2(\vec{p}) = 1$  ( $u$ ), d.h.  $P_{\pm}^{(h)} = P_{\pm}^{(h)}$

$P_+^{(h)} P_-^{(h)} = P_-^{(h)} P_+^{(h)} = 0$

⇒ jeder Zustand kann eindeutig

in Helizitätszustände  $\neq$  zerlegt werden:

$$u = (P_+^{(h)} + P_-^{(h)}) u = u_+^{(h)} + u_-^{(h)}$$

Wichtig: 1) für massive Teilchen ist  $h$  im Ruhesystem  $\vec{p} = \vec{0}$  nicht definiert

- 2) für massive Teilchen ist  $h$  keine Erhaltungsgröße:  
 wir können durch eine Lorentztrafo  $E_{\vec{p}}$  umdrehen (überholen)  
 $\Rightarrow h(\vec{p})$  ändert das Vorzeichen (der Spin bleibt!)
- 3) nur für masselose Teilchen (oder Anti-) die sich mit  $c=1$   
 bewegen (früher dachte man Neutrinos wären solche) ist  $h$   
 erhalten

Beispiel wählen wir  $\vec{p} \parallel e_z$ , also  $\vec{p} = (0, 0, |\vec{p}|)$

$$\Rightarrow h(\vec{p}) = \vec{e}_z \cdot \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{für ein solches } \vec{p} \text{ gilt } U(\vec{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \begin{pmatrix} (p_0 + m) \mathbb{1} & -|\vec{p}| \sigma_z \\ +|\vec{p}| \sigma_z & (-p_0 + m) \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} + m} \xi_s \\ \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \underbrace{\sigma_z \xi_s}_{S \xi_s} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h(\vec{p}) U(\vec{p}, s) = S U(\vec{p}, s) \quad \text{S Helizitätseigenwert}$$

$$\text{d.h. Spin von } U = \frac{S}{2} \quad \checkmark$$

Chiralität :

wie wir bereits in der Übung 3.1. gesehen haben (lassen sich  
 mit Hilfe der Chiralitätsoperatoren  $\gamma_5$

$$\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \left( = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \text{ in der Standarddarstellung} \right)$$

ebenfalls Projektionsoperatoren  $P_{L/R}$  definieren:

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad \text{wobei } L \text{ für Links- u. } R \text{ für}$$

Rechtshändig Teilchen gilt: jeder Spinor löst sich in

linken  $\angle$  und  $R$ -Anteil zerlegen:

$$u = (P_R + P_L) u \equiv u_R + u_L$$

Anwendungen:

\* wie sich später zeigen wird, wirkt die schwache WW nur auf linkshändige Teilchen  $L$ , d.h. auf den mit  $P_L$

$$P_L \text{ projizierten Anteil } P_L u = u_L$$

\* für masselose Teilchen ( $m=0$ ) haben  $\gamma_5$  und  $h(\vec{p})$  dieselben Eigenwerte:

→ im Bsp oben mit  $\vec{p} \parallel \vec{e}_z$ :  $\vec{p} = (0, 0, |\vec{p}|)$ ,  $m=0$

$$\Rightarrow u(\vec{p}, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}}} \xi_s \\ |\vec{p}| \\ \sqrt{E_{\vec{p}}} s \xi_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}}} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s \xi_s \end{pmatrix} \Rightarrow p^0^2 = \vec{p}^2 = E_{\vec{p}}^2$$

$$\Rightarrow \gamma_5 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}}} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s \xi_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}}} \begin{pmatrix} s \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = s \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}}} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s \xi_s \end{pmatrix}$$

d.h.  $\gamma_5$  hat Eigenwerte  $s$ , wie  $h(\vec{p})$

$$\Rightarrow \text{insbesondere gilt } \gamma_5 u_L = \gamma_5 \frac{1-\gamma_5}{2} u_L = -\frac{(1-\gamma_5)}{2} u_L = -u_L$$

d.h. linkshändige (rechts-) Teilchen haben

Chiralität  $-1$  (etc).

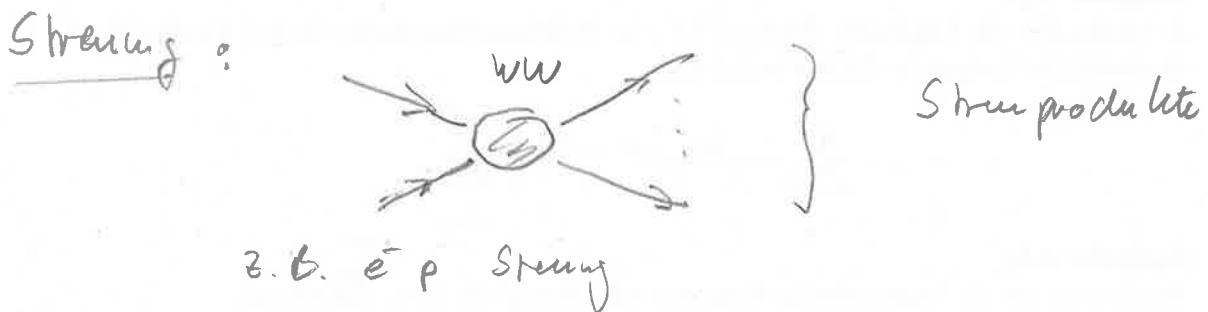
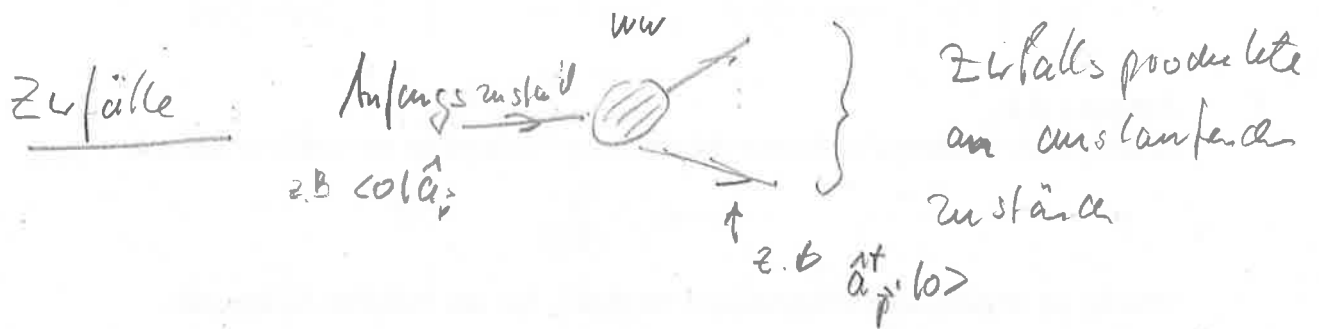
# Wechselwirkungen Teilchen: Zufälle & Streuung

Im vorherigen Kapitel haben wir die Bewegungsgl. und deren Lösungen für freie relativistische Teilchen kennen gelernt:

- Spin 0 - Skalare : Klein-Gordon Gl
- Spin 1 - Vektor : Maxwell - Gl
- Spin  $\frac{1}{2}$  - Spinor : Dirac - Gl.

Die Lsg. werden durch Impuls  $\vec{p}$  und ggf. durch Polarisation  $\lambda$  bzw. Spins/Helicität  $h$  oder Chiralität charakterisiert.

- Es sind 2 Arten von Wechselwirkungen zu unterscheiden



- Üblicherweise werden die Anfangs- bzw. Endzustände als ein- bzw. auslaufende ebene Wellen gewählt.

Im Folgenden betrachten wir zunächst Zufälle und dann Teilchenstreuung.

# Zerfälle - Grundbegriffe

- Lebensdauer  $\tau$  : \* normalisierte im Ruhesystem eines Teilchens (im Standardmodell kommen keine  $m=0$  Teilchen vor die zerfallen,  $p$  ist stabil!)  
\*  $\tau$  gibt die mittlere Lebensdauer an, d.h. die Zeit nach der im statistischen Mittel eine Anzahl Teilchen auf  $e^{-1}$  durch Zerfall reduziert ist (es für einen einzelnen radioaktiven Kern gibt es keine deterministische Vorhersage)

- Zerfallsrate  $\Gamma$  : \* Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit  $dt$ , daß ein Teilchen zerfallen wird (i.B. linear)

Änderung der Teilchen #  $dN = -\Gamma N(t) dt$

$$\Rightarrow \underline{N(t) = N(t=0) e^{-\Gamma t}}, \text{ es gilt } \Gamma = \frac{1}{\tau}$$

- Zerfallskanal  $i$  : \* gibt die Art des Zerfalls pro Partikel an (z.B.  $\beta^-$ ,  $\mu^+$ , ...)  
\* die Zerfallsrate in diesem Kanal  $\Gamma_i$

$\Rightarrow$  Gesamtzerfallsrate:  $\Gamma_{\text{tot}} = \sum_i \Gamma_i$

- Verzweigungsverhältnis : für den  $i$ -ten Kanal  $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{tot}}}$   
"je größer, desto mehr Zerfälle in diesem Kanal  $i$ "

$\rightarrow$  im Folgenden berechnen wir  $\Gamma_i$  mithilfe nichtrelativistischer Störungstheorie : "Fermi's goldene Regel"

Zur Erinnerung: zeitabh. Störungstheorie im Dirac (WW)-Bild (S. 15-17)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g \hat{V} \quad \text{ges. Hamiltonop, } \hat{H}_0 \text{ Hamiltonop des freien Teilchens}$$

$\hat{V}$  WWop, zeitunabh. (im Schrödingerbild)

$\Rightarrow$  Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}_{\pm}(t, t_0) = \mathbb{1} - ig \int_{t_0}^t \hat{V}_{\pm}(t') dt' + \mathcal{O}(g^2)$

$\hat{U}_{\pm 2.3}$

bestimmt die Zeitentwicklung

$$|\psi(t)\rangle_{\pm} = \hat{U}_{\pm}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_{\pm}$$

mit  $\hat{V}_{\pm}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t}$

$\hat{V}$  von oben, Hermitesch

\* es gilt offensichtlich  $(\hat{U}_{\pm}(t, t_0))^{-1} = \hat{U}_{\pm}(t_0, t) = \hat{U}_{\pm}(t, t_0)^{\dagger}$

unitär

$\Rightarrow$  die Streumatrix  $S$  ist wohl definiert als

$$S_{fi} = \sum_{\pm} \langle f | \hat{U}_{\pm}(t \rightarrow \infty, -\infty) | i \rangle_{\pm}$$

$\uparrow$  Endzustand (final state)       $\uparrow$  Anfangszustand (initial state)

mit Normierung  $\sum_{\pm} \langle i | i \rangle_{\pm} = \delta_{if}$ , d.h.

nur für  $g \neq 0$  hat  $S_{fi}$  nicht-diagonale Elemente!

Beispiel Zerfall des  $g$ -Mesons ( $\approx 775$  MeV) in 2 Pionen (je 139 MeV)

also z.B.  $g^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$

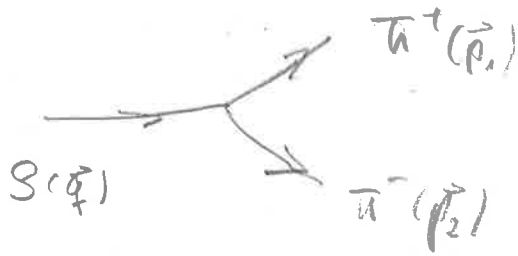
• particle data website: hier für gilt  $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{tot}}} \approx 100\%$

( $\exists$  andere Zerfälle der Größenordnung  $10^{-3}$  bis  $10^{-5}$ , z.B.  $\pi^+ \pi^- \gamma, \pi^0 \gamma$ )

Zwar ist  $g$  ein Spin 1 Meson, aber unachlässigbar wird dies und beschreibt dies als Lsg der KG-Gleichung

-45-

also



mit 4er Impuls

$$S: Q = (\frac{E_q}{q} = \sqrt{\vec{q}^2 + m_s^2}, \vec{q})$$

$$\bar{u}^\pm: P_{1/2} = (\frac{E_{p_{1/2}}}{p_{1/2}} = \sqrt{\vec{p}_{1/2}^2 + m_u^2}, \vec{p}_{1/2})$$

\* wir erwarten Energie-Impuls-Erhaltung  $\delta^{(4)}(P_1 + P_2 - Q)$

\* wir nehmen eine WW der folgenden Form an:

$$g \hat{V}_I(t) = M \int d^3x \phi^\dagger(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) S(\vec{x}, t) \quad \text{ist Hermitesch}$$

↑  
konstant

für  $S$  reelles Skalarfeld  
 $\in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow S_{fi} - S_{if} = -i \langle \bar{u}^+(\vec{p}_1), \bar{u}^-(\vec{p}_2) | \int dt \int d^3x M \phi^\dagger \phi S | S(\vec{q}) \rangle + \mathcal{O}(g^2)$$

mit  $\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_{p_1}} \left[ \underset{\text{einlaufend } \bar{u}^-}{\hat{a}_{\vec{p}_1}^-} e^{-ip_1 \cdot x} + \underset{\text{auslaufend } \bar{u}^+}{\hat{b}_{\vec{p}_1}^+} e^{ip_1 \cdot x} \right]$  komplexe Lsg von KG

$\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_{p_2}} \left[ \underset{\text{einlaufend } \bar{u}^+}{\hat{a}_{\vec{p}_2}^+} e^{+ip_2 \cdot x} + \underset{\text{auslaufend } \bar{u}^-}{\hat{b}_{\vec{p}_2}^-} e^{-ip_2 \cdot x} \right]$

$\hat{S}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[ \underset{\text{vernichtet, einlaufendes Teilchen } S}{\hat{c}_{\vec{q}}^-} e^{-iQ \cdot x} + \underset{\text{erzeugt, einlaufendes Teilchen } S}{\hat{c}_{\vec{q}}^+} e^{+iQ \cdot x} \right]$  reelle Lsg von KG

ferner benutzen wir folgende Darstellung für Anfangs- und Endzustand

$$|S(\vec{q})\rangle = \hat{C}_{\vec{q}}^+ |0\rangle, \quad \text{entsprechend gilt } \langle S(\vec{q})| = \langle 0| \hat{C}_{\vec{q}}^+$$

d.h. wir haben als Normierung  $\langle S(\vec{q}) | S(\vec{q}) \rangle = \langle 0 | \hat{C}_{\vec{q}}^+ \hat{C}_{\vec{q}}^+ | 0 \rangle$

Kommutator

$$= \langle 0 | \hat{C}_{\vec{q}}^+ \hat{C}_{\vec{q}}^+ | 0 \rangle + \langle 0 | \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{q}) | 0 \rangle = \delta^{(3)}(0) \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_{1}$$

gibt 0                      gibt 0