

$$\text{denn } Q_A \cdot Q_B = E_A E_B - \vec{q}_1 (-\vec{q}_1) = E_A E_B + |\vec{q}_1|^2$$

$$\Rightarrow (Q_A \cdot Q_B)^2 = E_A^2 E_B^2 + |\vec{q}_1|^4 + 2 E_A E_B |\vec{q}_1|^2$$

$$\Rightarrow \text{in F von Seite 54: benutze } E_A^2 = m_A^2 + |\vec{q}_1|^2, E_B^2 = m_B^2 + |\vec{q}_1|^2$$

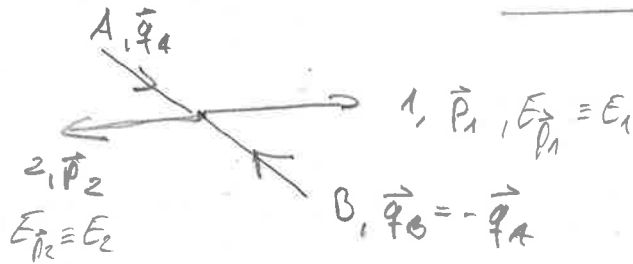
$$= (Q_A \cdot Q_B)^2 - m_A^2 m_B^2 = (m_A^2 + |\vec{q}_1|^2)(m_B^2 + |\vec{q}_1|^2) + |\vec{q}_1|^4 + 2 E_A E_B |\vec{q}_1|^2 - m_A^2 m_B^2$$

$$= 2 |\vec{q}_1|^4 + |\vec{q}_1|^2 (m_A^2 + m_B^2) + 2 E_A E_B |\vec{q}_1|^2$$

$$= |\vec{q}_1|^2 \underbrace{(2 |\vec{q}_1|^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2 E_A E_B)}_{E_A^2 + E_B^2} = \underbrace{|\vec{q}_1|^2 (E_A + E_B)^2}$$

• Zweikörperstreuung phasenraumintegration ( $\neq$  Ü 5.3)

Wir betrachten wieder das Schwerpunktsystem:  $\sqrt{s} = E_A + E_B$



wir können den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}}$  auch differenzial schreiben

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{F} \int d\Phi_2 |M|^2 \Rightarrow d\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{F} d\Phi_2 |M|^2, \text{ benutze } F = 4(E_A + E_B) |\vec{q}_1|^2$$

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{1}{4(E_A + E_B) |\vec{q}_1|^2} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - Q_A - Q_B) |M|^2$$

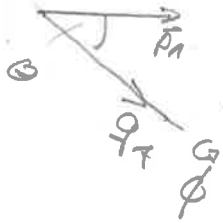
$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|M|^2}{|\vec{q}_1| (E_A + E_B) E_1 E_2} d^3 p_1 d^3 p_2 \delta(E_1 + E_2 - E_A - E_B) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \underbrace{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}_{=0})$$

$p_2 \rightarrow \text{int.}$   
 $\Rightarrow$  durchführen

$$\int d\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|M|^2}{|\vec{q}_1| (E_A + E_B)} \frac{d^3 p_1}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2} \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_1^2}} \delta(\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_1^2} - E_A - E_B)$$

- um den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  zu bestimmen parametrisieren wir  $d^3p_1 = s^2 ds d\Omega$ ,  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$

$$\text{mit } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty ds s^2 \int_{\vec{p}_2} d\sigma_{\text{tot}}$$



- \* Welche Abhängigkeit von  $\vec{p}_1$  und  $\vec{q}_1$  kann  $M$  haben?

$$|M|^2 = |M|^2(\vec{q}_A, \vec{q}_B, \vec{p}_A, \vec{p}_B) \stackrel{\text{Schwanzpunkt, } S\text{-Fkt.}}{=} |M|^2(\vec{q}_1, -\vec{q}_1, \vec{p}_1, -\vec{p}_1)$$

- $|M|^2$  ist ein Skalar, d.h. es kann von  $|\vec{q}_1|^2$ ,  $|\vec{p}_1|^2$  und  $\vec{p}_1 \cdot \vec{q}_1 = |\vec{q}_1| |\vec{p}_1| \cos\theta$  abhängen  $\Rightarrow$  wir können  $\int d\sigma$  nicht ohne weitere Annahme durchföhren!

- \* Berechnung von  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 |\vec{q}_1| (E_A + E_B)} \int_0^\infty ds s^2 \frac{|M|^2 \delta(\sqrt{m_1^2 + s^2} + \sqrt{m_2^2 + s^2} - E_A - E_B)}{\sqrt{(m_1^2 + s^2)(m_2^2 + s^2)}}$$

substituiere  $E = \sqrt{m_1^2 + s^2} + \sqrt{m_2^2 + s^2}$ ;  $E(s=0) = m_1 + m_2$ ,  $\Rightarrow$  S auflösen

$$\Rightarrow \frac{dE}{ds} = \left( \frac{1}{\sqrt{m_1^2 + s^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_2^2 + s^2}} \right) s = \frac{Es}{\sqrt{(m_1^2 + s^2)(m_2^2 + s^2)}}$$

- \*  $s$  ausgedrückt durch  $E$ :  $s(E)$

$$E^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2s^2 + 2\sqrt{(m_1^2 + s^2)(m_2^2 + s^2)}$$

$$\Rightarrow (E^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2s^2)^2 = 4(m_1^2 + s^2)(m_2^2 + s^2)$$

$$\Leftrightarrow E^4 + m_1^4 + m_2^4 + 4s^4 - 2E^2(m_1^2 + m_2^2 + 2s^2) + 4s^2(m_1^2 + m_2^2) + 2m_1^2 m_2^2 = 4(m_1^2 + s^2)(m_2^2 + s^2)$$

$$= 2\cancel{4} m_1^2 m_2^2 + 4(m_1^2 + m_2^2)s^2 + 4s^4$$

$$\Rightarrow \boxed{s(E) = \frac{1}{2E} \sqrt{E^4 - 2E^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 |\vec{q}_A| \sqrt{s}} \int_{-m_1 - m_2}^{\infty} \frac{dE}{E} g(E) |M|^2(|\vec{q}_A|, g(E), \cos\theta) \delta(E - \sqrt{s})$$

mit  $\sqrt{s} = E_A + E_B$

$m_1 + m_2$

Kann von Energie-Impuls-Erhaltung

- die Reaktion im Schwerpunktsystem findet nur statt wenn  $\sqrt{s} > m_1 + m_2$  (sonst hat  $\delta$  keine Nullstelle)  $\Leftrightarrow \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 |\vec{q}_A| \sqrt{s}} \frac{g(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} |M|^2(|\vec{q}_A|, g(\sqrt{s}), \cos\theta) \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}_A| |M|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_A|, \cos\theta)}{(8\pi)^2 |\vec{q}_A| (E_A + E_B)^2} \cdot \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2) \right\} \begin{array}{l} \text{da } g(\sqrt{s}) = |\vec{p}_A| \\ \text{so dass Energie u. Impuls} \\ \text{erhalten} \end{array}$$

\* Berechnung ist möglich ohne explizite Kenntnis der Amplitude  $M$ , (dies geht für  $n > 2$  Endprodukte nicht mehr i.A.)

\*  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  ist von der Form kinematik (bekannt) mal  $|M|^2$ ,

d.h. sowie wir  $|M|^2$  kennen ist alles bestimmt.

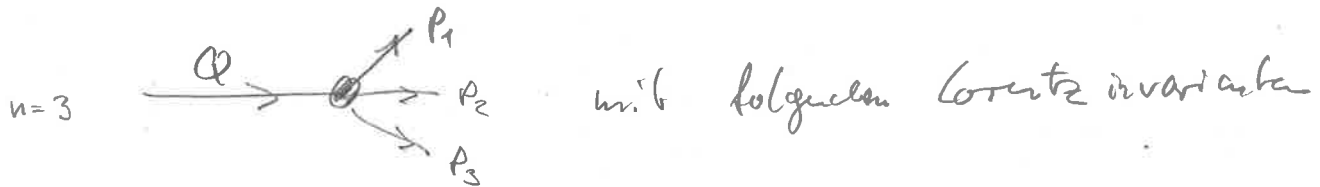
### Weitere Bemerkungen zum Phasenraum (Kinematik)

- Wir haben oben die Phasenraumintegration für die 2 Körperstreuung im Schwerpunktsystem ausgeführt und durch die Variablen  $|\vec{q}_A|, |\vec{p}_A|, \cos\theta$  ausgedrückt. Manchmal ist es vorteilhafter,

Lorentz-invariante Variablen zu benutzen. Diese sind gegeben durch die Massen  $m_1, m_2, m_A, m_B$  sowie die

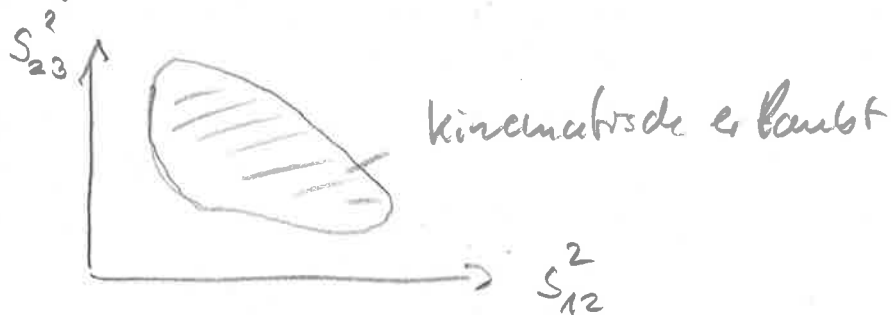
Mandelstam-Variablen  $s = (p_A + p_B)^2, t = (p_A - p_1)^2, u = (p_A - p_2)^2$

- es sind nur 2 der 3 Variablen  $s, t, u$  unabhängig (s. Ü 6.3)
- Alle physikalischen Größen können durch die Massen und durch  $s$  und  $t$  ausgedrückt werden (s. dazu Bsp in Ü 6.4)
- \* Falls es noch mehr Teilchen im Endzustand gibt wird die Kinematik komplizierter (s. z. B. Ü 1.4)



$$s_{12}^2 = (P_1 + P_2)^2, \quad s_{13}^2 = (P_1 + P_3)^2, \quad s_{23}^2 = (P_2 + P_3)^2$$

- das sogenannte Dalitz-Diagramm stellt die kinematisch erlaubte Region dar, also z. B.



jeder Punkt entspricht einer bestimmten Geometrie des Endzustandes

- Weiterführende Literatur dazu

E. Byckling, K. Kajantie "Particle Kinematics"

Wiley, London 1973

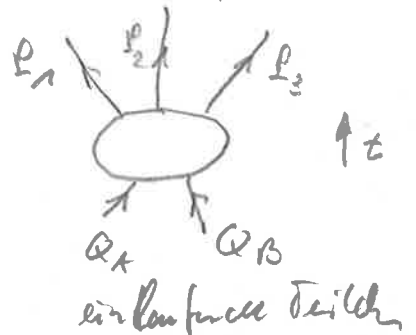
# Die Feynman Regeln

(ohne Herleitung)

Wie berechnet man im Allgemeinen die Amplitude  $M$ ? Es gibt hier für ein graphisches <sup>Verfahren</sup>, in dem die Terme und Integrale symbolisch durch Feynman-Diagramme dargestellt werden, und nach den Feynman-Regeln zusammengestellt werden. Diese elegante und "physikalische" Sprache wird sehr viel benutzt (auch in anderen Teilend. Physik) aus laienförmige Teilchen.

## • Feynman-Diagramme - Bausteine:

betrachten wir z. B. folgenden Prozeß

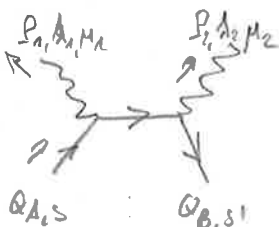


### 1) externe Linien: (außen Bausteine)

diese werden durch ihren 4er Impuls gekennzeichnet, also  $Q_A, P_1, \dots$ . Fermi haben Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen eine Helizität  $S$  und Spin  $-1$  Teilchen einen Polarisationszustand  $\lambda$  und 4er Index  $\mu$ . Folgende Konventionen werden verwendet, um diese zu unterscheiden

$\overline{P} \rightarrow$	Spin 0 mit 4er Impuls $P$ (z. B. $\pi^0$ )	$\hat{1}$ Faktor 1
$\rightarrow \underline{P}, \lambda, \mu$	Spin 1 mit $\rightarrow$ (z. B. $\rho$ ) Polarisation $\lambda$ , Index $\mu$	$E_{(\lambda)}^\mu(P)$
$\rightarrow \underline{P}, s$	Spin $-\frac{1}{2}$ Teilchen (z. B. $e^-$ ) mit $P$ und Helizität $s$	einlaufend $u(p, s)$ auslaufend $\bar{u}(p, s)$
$\leftarrow \underline{P}, s$	Spin $+\frac{1}{2}$ Anti-Teilchen (z. B. $e^+$ ) mit $P$ und $s$	einlaufend $\bar{v}(p, s)$ auslaufend $v(p, s)$

Bsp:



$$e^-(Q_A, s) + e^+(Q_B, s') \rightarrow \gamma(P_1, \lambda_1, \mu_1) + \gamma(P_2, \lambda_2, \mu_2)$$

\* wichtig: die externen (o. äußeren) Linien (o. Beine) stellen reelle Teilchen dar, die  $\underline{p}^2 - p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$  erfüllen, d.h. sie erfüllen die Bewegungsgl. und werden on-shell genannt

\* die Pfeile auf den Linien zeigen Teilchen u. Anti- $\nu$ ,  $\bar{u}$ , wenn Skalarfelder Ladungen tragen wie  $\pi^+$  und  $\pi^-$  können sie auch mit Pfeilern versehen werden  $\dashrightarrow$

(2) Vertices :

wir haben gesehen daß der Zeitentwicklung op  $\rightarrow \int dt g \hat{V}_I(t)$  zur Ordnung  $g$  enthält, mit  $\hat{V}$  der WW in  $\hat{K} = \hat{K}_0 + \hat{V}$  ↙ freie Teilchen

Im Lagrange formalismus haben wir  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$  und damit den Beitrag  $+i \int dt \int d^3x \hat{I}_I$  zur WW

i.A. ist  $\hat{I}_I$  ein Polynom in den Feldern, d.h. jeder Term enthält Stärke kopplung z.B.  $\hat{I}_I = g_a g_b \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b + g_a g_b c d \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b \hat{\phi}_c \hat{\phi}_d$   
mit z.B.  $a = \pi, b = \pi^+, c = \pi^-$  etc

graphisch:



für Spin-0 Felder

Faktor




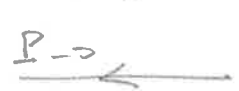
$i g_a g_b c$

$i g_a b c d$

\* an jedem Vertex gilt 4er Impuls-Erhaltung!

### ③ Innere Linien

für diese schreibt man einen Propagator. Dieser hängt von 4er Impuls, Masse und Art des Teilchens ab. Propagatoren haben keine feste Helizität oder Polarisation, deshalb wird über alle  $s$  oder  $t$  summiert.

	Spin 0	Faktor * $\frac{i}{p^2 - m^2}$
	Spin - 1	$\frac{i}{p^2} (-g_{\mu\nu})$
	Spin - 1/2 Teilchen	$\frac{i}{p^2 - m^2} (\not{p} + m)$
	o. " Antiv. "	

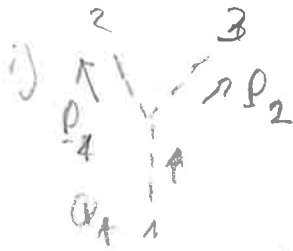
\* wie in den Vollständigkeitsrelationen ist schon über  $s$  bzw  $t$  summiert

⊛ wichtig: für jede innere Linie wird über allen 4er Impuls mit Maß  $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  integriert.

⇒ auf den innere Linien erfüllen die Teilchen nicht  $p^2 = m^2$  da wir ja zu festem  $m$  über alle möglichen  $p$ 's integrieren!  
Diese Teilchen (Antiv.) heißen off-shell.

- weitere Faktoren:
- (-1) für jede geschlossene Fermion-Schleife (loop)
  - (-1) zwischen 2 Diagrammen, die sich nur durch Austausch 2 externer Fermion-Linien unterscheiden
  - (ii) Gesamtphase (in  $M^2$  eigentlich egal)

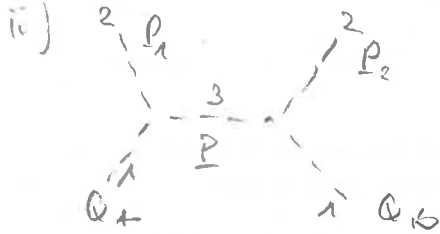
Beispiele:  $\int_{\mathbb{I}} = -g \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3$  Teildimensarte



$$U = (i\gamma) \cdot \delta^{(4)}(q_A - p_1 - p_2)$$

↑  
Vertex

|  
Impuls erhaltung  
Kovariant



$$U = i (-ig)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_3^2} \delta^{(4)}(q_A - p - p_1) \delta^{(4)}(p - p_2 - q_B)$$

evaluates

$$= \frac{g^2}{(q_A - p_1)^2 - m_3^2} \delta^{(4)}(q_A + q_B - p_1 - p_2)$$