* Ist damit wegen $\mathcal{M}(z) \to \infty$ die gesamte Störungstheorie hinfällig?

Nein, denn es gibt sogenannte renormierbare Theorien, bei denen sich alle diese Divergenzen Ordnung für Ordnung in der Störungstheorie kürzen lassen, wenn man nur physikalische Observablen betrachtet. Unsere Eichtheorien gehören zu dieser Klasse.

[Idee der Renormierung: bei jeder Ordnung von g werden zu $\mathcal{L}$ eine endliche Anzahl von Counterterms (CT) hinzuaddiert, z.B. $m^2\phi^2$ so daß $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT}$ ein endliches Resultat (in dieser Ordnung) ergibt.

Damit sind präzise, endliche Vorhersagen möglich]

* Auch Integrale die für $k \to 0$ divergent sind: Infrarot (IR) Divergenzen

∘ Eichinvarianz & Renormierbarkeit:

in der QFT kann man zeigen daß folgende Bedingungen hinreichend für die Renormierbarkeit sind:

(alles Vektorfelder ↘)

- die $\mathcal{L}$'s für die Träger der WW, d.h. Photonen γ, Gluonen, W- und Z-Bosonen sind eichinvariant
- die WW-Terme zwischen den Feldern enthalten nur
  - 3 Felder die fermionisch oder bosonisch[*] sind z.B. 
  - 4 Felder die bosonisch[*] sind z.B. 

(wieso hatten wir bereits mittels der kovarianten Ableitung gesehen für die bisherigen Elementarteilchen)

(*) bei allen bisherigen Elementarteilchen liegen nur Spin $\frac{1}{2}$ Fermionen und Spin 0 oder Spin 1 Bosonen vor

Konsequenzen der Eichinvarianz:

Zur Erinnerung (S. 25-26.): $\mathcal{L}$ des e.m. Feldes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

ist invariant unter Eichtransformationen

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x)$$, mit $\chi(x)$ bel. Skalarfeld

aber $\mathcal{L} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu(x) A^\mu(x)$ $\hat{=}$ Lorentzinvarianter Massenterm

ist nicht eichinvariant:

$$\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \to \frac{1}{2} m^2 A'_\mu A'^\mu = \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + \underbrace{m^2 A^\mu \partial_\mu \chi + \frac{1}{2} m^2 (\partial_\mu \chi)\partial^\mu \chi}_{\text{i.A.} \neq 0}$$

$\Rightarrow$ ok für γ und Gluonen da masselos, aber:

* Wie können wir Z- u. W-Bosonen auf eine eichinv. Weise Masse geben?
* Wie steht es mit den anderen Feldern: ψ_L und ψ_R, WW doch unterschiedlich!?

Skalarfelder

$$\left.\begin{aligned} \phi(x) &\to \phi'(x) = e^{i\chi(x)} \phi(x) \\ \phi^\dagger(x) &\to \phi'^\dagger(x) = e^{-i\chi(x)} \phi^\dagger(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Massenterm in der KG. Theorie

$$\underbrace{\mathcal{L} = D_\mu \phi D^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \phi^\dagger}_{\text{ist invariant } \checkmark \text{ (ü 4.1)}}$$

(wir haben bislang aber keine Skalare als Elementarteilchen ....)

Fermionen wenn L- und R-händige Teilchen unterschiedliche WW brauchen wir eine Invarianz

$$\psi_L \to \psi_L' = e^{i\alpha_L(x)} \psi_L$$
$$\psi_R \to \psi_R' = e^{i\alpha_R(x)} \psi_R$$

S.23: in $\mathcal{L}_D = \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - m\bar{\psi}\psi \overset{\text{ü}}{=} \bar{\psi}_R i \partial\!\!\!/ \psi_R + \bar{\psi}_L i \partial\!\!\!/ \psi_L - m\bar{\psi}_R \psi_L - m \bar{\psi}_L \psi_R$

ist der Massenterm nicht invariant für $\alpha_L \neq \alpha_R$ und $m\bar{\psi}_L\psi_L = m\bar{\psi} P_R P_L \psi = 0$

Die Idee des Standardmodells [Glashow, Weinberg, Salam 1967]

- Alle 3 WW werden durch Eichtheorien beschrieben
- ∃ ein weiteres Elementarteilchen, das Higgs-Boson, einem skalarfeld mit Masse ϕ
- Alle anderen Elementarteilchen erhalten ihre Masse durch WW mit ϕ (max 3 WW Teilchen)

* Wie wir genau diesen scheinbaren Widerspruch aus Eichinvarianz => Renormierbarkeit, aber keine $m_Z, m_W \neq 0$ lösen kommt später: spontane Symmetriebrechung des Grundzustandes (Vakuums).

Wichtig:

die aus Elementarteilchen zusammengesetzten Teilchen wie Proton p, Neutronen, etc. enthalten ihre Masse nicht durch das Higgboson!

So machen die Quarkmassen zusammen genommen nur ein Prozent der Protonmasse aus. d.h. auch mit $m_u = m_d = 0$ wäre m_p fast genauso groß. [$m_u = 2.3$ MeV, $m_d = 4.8$ MeV]

(SM) [O. Nachtmann, Kap 22]

Die Lagrange-Dichte des Standardmodells der Elementarteilchen

Wir benötigen folgende Bausteine für alle 3 WW und Elementarteilchen

Bsp

i) Eichinvarianz : $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$

Hyperladung, in linearer Kombination mit $SU(1)$ führt dies zur em WW (s. 75)

schwache WW wirkt auf linkshändige (L) Teilchen

starke WW, wirkt auf Farbe (= colour)

sowie die dazugehörigen Eichbosonen : Photon, Z^0, $W^\pm$, Gluonen

ii) Renormierbarkeit – aus Eichinvarianz und erlaubten Vertizes

iii) Materie-Teilchen : 3 Generationen, Doublets u. Singletts unter $SU(2)_L$

$$L_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad L_{2L} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad L_{3L} = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$$

$$e_R \qquad \mu_R \qquad \tau_R$$

$$Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad Q'_{2L} = \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \quad Q'_{3L} = \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$$

$$u_R \qquad c_R \qquad t_R$$

$$d_R \qquad s_R \qquad b_R$$

sowie das Higgsboson $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ Skalarfeld

iv) Die Quantenzahlen der verschiedenen Teilchen, d.h. ob und mit welcher Ladung (Q_i) sie mit den Eichbosonen WW

$\Rightarrow$ wir konstruieren die allgemeinst mögliche $\mathcal{L}$, diese hat viele freie Parameter (Kopplungen)

* Die Lagrange-Dichte von $U(1)_Y \times SU(2)_L$ ist kompliziert, deswegen studieren wir diese zunächst getrennt. $\mathcal{L}_{QCD}$ kann dann später unverändert hinzugefügt werden. Wir gehen folgendermaßen vor:

1) $\mathcal{L}$ von $U(1)_Y \times SU(2)_L$, mit allen Ψ's u. Kopplung an Φ
2) Spontane Symmetriebrechung u. das Higgs Boson
3) Vektorbosonen $W^\pm, Z^0$ und A im SM und Massenerzeugung
4) Fermionen im SM und ihre Massen

1) Die Lagrangedichte des elektroschwachen Sektors:

Um die Eichinvarianz unter lokalen $U(1)$ und $SU(2)$ Trafos zu erzielen brauchen wir folgende

Kovariante Ableitung $\boxed{D_\mathcal{S} = \partial_\mathcal{S} + i g T^a W^a_\mathcal{S} + i Y_W g' B_\mathcal{S}}$

- wobei g und g' Kopplungskonstanten sind, aus deren Kombinationen g_W und e resultieren
- $\boxed{T_b = \frac{1}{2} \sigma_b}$, $\sigma_{b=1,2,3}$ Pauli-Matrizen, sind die Erzeugenden von $SU(2)$
- die $SU(2)$ Eichfelder $W_\mathcal{S}^{a=1,2,3}$ und $B_\mathcal{S}$ werden später zu $W^\pm, Z^0$ und A kombiniert

Lokale Eichtransformationen:

- ein $SU(2)_L$ Dublett $\Psi(x)$, wie z.B. L_{1L} oder Q'_{1L} transformiert $\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{-i Y_W \alpha(x)} e^{-i \beta_a(x) T_a} \Psi(x)$

wobei Y_W seine Hyperladung ist (s. Nachtrag S. 75 zur Hyperladungsdef.)

• ein Singulett $\psi_R(x)$ wie z.B. e_R oder u_R transformiert nicht unter $SU(2)$, sondern nur unter $U(1)$:

$$\psi_R(x) \to \psi_R'(x) = e^{-iY_W \alpha(x)} \psi(x)$$

• Eichtransformationen der Vektorfelder

$SU(2)_L$:
$$T^a W_\delta^a(x) \equiv \vec{T}\cdot\vec{W}_\delta(x) \to \vec{T}\cdot\vec{W}_\delta'(x) = U(x)\,\vec{T}\cdot\vec{W}_\delta(x)\,U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\delta U(x)\right)U^{-1}(x)$$

mit $U(x) = e^{-i\beta_a(x)T_a} = e^{-i\vec{\beta}\vec{T}}$ unitär, $U^{-1}(x) = U^+(x)$

$(\beta_a \in \mathbb{R} \Rightarrow T_a^+ = T_a)$

$U(1)_Y$:
$$B_\delta(x) \to B_\delta'(x) = B_\delta(x) + \frac{1}{g'}\partial_\delta \alpha(x)$$

damit sind die kinetischen Terme (und Selbst WW) der Eichfelder (= gauge fields) in folgender Form invariant:

$$\mathcal{L}^{gauge} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$$

mit $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\,\varepsilon_{abc} W_\mu^a W_\nu^b$ (wie QCD, nur $SU(2)$ hier)

und $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

sowie folgende kinetische Terme und WW der Fermionen inv.

quark, lepton

$$\mathcal{L}^{q,l} = \sum_{\psi_L \in L_{iL}, Q_{iL}} \bar{\psi}_L i\gamma^\delta D_\delta \psi_L + \sum_{\psi_R \in e_R\ldots,\, u_R\ldots} \bar{\psi}_R i\gamma^\delta D_\delta \psi_R$$

nur $\partial_\delta + iY_W g' B_\delta$ da keine $SU(2)_L$ WW