Invariante Lagrange-Funktion: Dirac vs. Majorana

* die Lagrange-Funktion des Dirac-Spinors ausgedrückt durch $\psi_{L,R}$

S. 23: $\mathcal{L}_D = \bar\psi\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$; $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$, nach Addition einer totalen Ableitung $\frac{i}{2}\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)$

$$= \frac{i}{2}\left(\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi\right) - m\bar\psi\psi$$

Kinetischer Term: $\gamma^{0\,2} = 1_4$, $\gamma^0\gamma^k = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ -\sigma^k & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_D^{kin} = \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} - \partial_\mu\begin{pmatrix}\psi_L^\dagger\\ \psi_R^\dagger\end{pmatrix}\gamma^0\gamma^\mu\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{i}{2}\left[\psi_R^\dagger\partial_0\psi_R + \psi_L^\dagger\partial_0\psi_L - (\partial_0\psi_R^\dagger)\psi_R - (\partial_0\psi_L^\dagger)\psi_L\right]$$

$$+ \frac{i}{2}\left[-\psi_L^\dagger\sigma^k\partial_k\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma^k\partial_k\psi_R + (\partial_k\psi_L^\dagger)\sigma^k\psi_L - (\partial_k\psi_R^\dagger)\sigma^k\psi_R\right]$$

$$= \frac{i}{2}\left[\psi_R^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_0\psi_R + \psi_L^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_0\psi_L\right] \qquad , \quad \bar\sigma^k = -\sigma^k,\ \sigma^0 = 1 = \bar\sigma^0$$

$$-\frac{i}{2}\left[\psi_L^\dagger\bar\sigma^k\overleftrightarrow{\partial}_k\psi_L + \psi_R^\dagger\sigma^k\overleftrightarrow{\partial}_k\psi_R\right]$$

$$= \underbrace{\frac{i}{2}\psi_L^\dagger\bar\sigma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi_L}_{} + \underbrace{\frac{i}{2}\psi_R^\dagger\sigma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi_R}_{} \equiv \frac{i}{2}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$$

kinetischer Term für je ein Majorana Fermion

$$= \frac{i}{4}\overline{\Psi^M}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi^M$$

wobei wir hier $\psi_{L,R}$ als antikommutierende Variable oder Feldoperatoren behandeln müssen

Dirac-Massenterm:

$$\mathcal{L}_D^{mass} = -m\bar{\Psi}\Psi = -m\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} = -m\begin{pmatrix}\psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$$

$$= -m\left(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L\right)$$

wie wir bereits wußten

nebenbei: es gibt auch einen anderen invarianten

axialen Massenterm $= -im\bar{\Psi}\gamma_5\Psi = -im\begin{pmatrix}\psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$

$$= +im\left(\psi_R^\dagger\psi_L - \psi_L^\dagger\psi_R\right)$$

der ebenfalls reell ist

Majorana-Massenterm:

$$\mathcal{L}_M^{mass} = +\frac{m}{2}\bar{\Psi}^M\Psi^M = +\frac{m}{2}\begin{pmatrix}\psi_L\\ -\sigma^2\psi_L^*\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ -\sigma^2\psi_L^*\end{pmatrix} = +\frac{m}{2}\begin{pmatrix}\psi_L^\dagger & -\psi_L^T\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sigma^2\psi_L^*\\ \psi_L\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{m}{2}\left(\psi_L^\dagger\sigma^2\psi_L^* + \psi_L^T\sigma^2\psi_L\right)$$

ist Hermitesch

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_M = \frac{i}{2}\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi_L - \frac{m}{2}\left(\psi_L^\dagger\sigma^2\psi_L^* + \psi_L^T\sigma^2\psi_L\right)}$$

Lagrange Funktion f. Majorana Fermion

$$= \frac{i}{4}\bar{\Psi}^\dagger_M\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi_M + \frac{m}{2}\bar{\Psi}^M\Psi^M$$

es gibt auch den entsprechenden axialen Massenterm

$$+\frac{im}{2}\bar{\Psi}^M\gamma_5\Psi^M = +\frac{im}{2}\begin{pmatrix}\psi_L^\dagger & -\psi_L^T\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ -\sigma^2\psi_L^*\end{pmatrix}$$

$$= +\frac{im}{2}\left(\psi_L^T\sigma^2\psi_L - \psi_L^\dagger\sigma^2\psi_L^*\right)$$

[Lit: Griffiths, Nachtmann]

Vereinheitlichte Theorien – Great Unified Theory (GUT)

[Georgi, Glashow, 1974]

Was ist die Idee?

* das Standardmodell hat viele freie Parameter und WW

* eine GUT soll das SM vereinheitlichen und mit weniger Parametern und nur einer WW (Kopplung) auskommen.

Die GUT würde bei hohen Energien gelten und das SM als effektive Niederenergietheorie enthalten, so wie die elektroschwache Theorie im limes $m_{W,Z} \to \infty$ die Fermische Theorie als effektive Theorie ergibt.

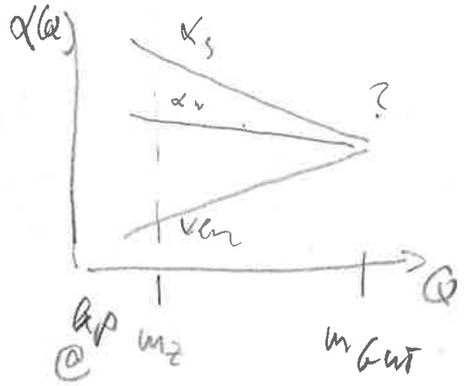
dies würde
- die # der Parameter reduzieren
- Beschränkungen der Renormierbarkeit an das SM aufheben (Fermi ist nicht ")

$\Rightarrow$ Neutrino-Massenterme erlauben die allgemeiner Art sind

Wie kommt man auf so eine Idee, außer aus ästhetischen Gründen bzw Symmetrien?

Vereinheitlichung der Eichkopplungen:

* Störungstheoretische Berechnungen in der QFT ergeben, daß die Kopplungskonstanten energieabhängig sind [typischerweise wird $\alpha_{s,w,em}$ betrachtet]



die 3 Kopplungen treffen sich (fast!) bei einer sehr hohen Energieskala $m_{GUT} \approx 10^{15}-10^{16}$ GeV

die Idee der SU(5) von Georgi und Glashow (hier $m_\nu = 0$)

* in einer Generation haben wir

$$\boxed{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \\ e_R & u_R, d_R \end{array}}$$

und da die Quarks eine Farbladung (r, b, g) tragen gibt es

für Leptonen 3 "Freiheitsgrade" (degree of freedom = dof)

Quarks $4 \times 3 = 12$

$\Sigma\ 15$

(wir zählen hier nicht reelle dof sondern die Anzahl der Weylspinoren)

GlGe 1974 organisiere diese zu einer SU(5)-darstellung:

- SU(5) Spaltenvektor $(\nu_L, e_L, d_R^r, d_R^b, d_R^g)$
- antisym. 5x5 Matrix mit $(e_R, u_R^r, u_R^b, u_R^g, d_L^r, d_L^b, d_L^g)$ (hat $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ Einträge)

=> statt 5 Elementen der $SU(2)_L \times U(1)_Y$-darstellung oben haben wir nur 2

statt 3 WW haben wir nur 1 WW mit Eichgruppe SU(5)!

[trivialerweise enthält SU(5) $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

$$5\times5 \begin{pmatrix} \boxed{U} & \\ & \boxed{V} \end{pmatrix} \cdot e^{i\varphi} \qquad UU^\dagger = \mathbb{1}_3, \quad VV^\dagger = \mathbb{1}_2$$]

* eine weitere Alternative zur SU(5) wäre SO(10), hier hätten auch die viel später entdeckten Neutrino-Massen platz in Form von ν_R

Welche Konsequenzen hat diese SU(5)-Idee?

* allgemein hat eine $SU(N_c)$ N_c^2-1 Parameter und entsprechende Erzeugende T^a $a=1,2,\dots,N_c^2-1$ in $D_\mu = \partial_\mu - i g_{GUT} A_\mu^a T^a$

d.h. hier $N_c = 5 \Rightarrow$ $25-1=24$ Parameter & Vektorbosonen

- die bekannten Gluonen 8, W&Z-Bosonen 3 + Photon 1 haben 12 weitere Partner, die X-Bosonen $\begin{cases} 6\,X \text{ mit Ladung } \pm\frac{4}{3} \text{ (und je 3 Farbe)} \\ 6\,Y \text{ mit Ladungen } \pm\frac{1}{3} \text{ (\& 3 Farben)} \end{cases}$

* da die X bisher nicht beobachtet wurden, müssen sie sehr schwer sein $\rightarrow$ spontane Symmetriebrechung

Unterschied zur Brechung bisher:

* $SU(2)_L$ wurde komplett gebrochen, alle 3 Bosonen wurden massiv $m_W, m_Z \neq 0$
  und $U(1)$ ungebrochen $m_\gamma = 0$
  (genauer gesagt die wichtigen Linearkombis $W^\pm, Z, A$)
* hier Brechung $SU(5)$
  - Gluonen und Photon bleiben masselos
  - $W^\pm, Z$ bekommen "kleine" Masse $m_{Z,W} \approx 100$ GeV
  - X-Bosonen bekommen "große" Masse $m_X \approx 10^{16}$ GeV

  $\Rightarrow$ partielle Symmetriebrechung

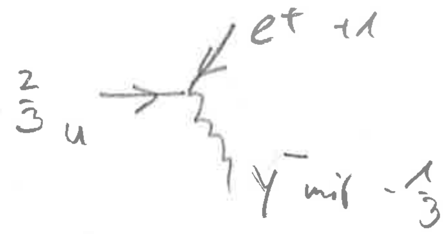
$\rightarrow$ ein dazu passendes GUT-Higgs gibt es
(nicht Spaltenvektor sondern 5x5 spurlos & Hermitesch)

•• statt g_s, g_w, g_{em} gibt es jetzt g_{GUT} und m_{GUT}, $\sin\Theta_W$ kann berechnet werden und in SU(5) ergibt sich $\sin^2\Theta_W \approx 0{,}214$ was recht gut stimmt!

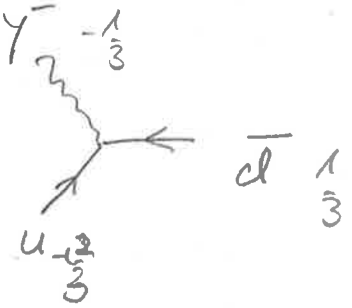
Proton-Zerfall

* eine Vorhersage der SU(5) bzw eigentlich aller GUT-Theorien ist die Instabilität des Protons:

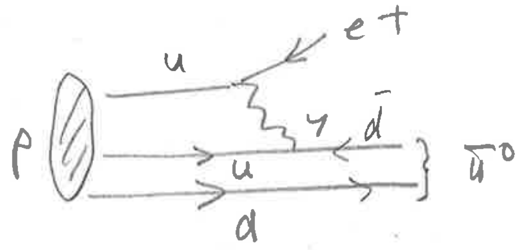
Grund ist daß Quarks und Leptonen im selben Vektor $\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ d_R^{r,b,g} \end{pmatrix}$ an die X-Bosonen koppeln:



sowie



d.h. es gibt Zerfälle $\underline{p \to e^+ + \pi^0}$



(+ weitere Prozesse, s. Griffiths S. 408)

die Zerfallsrate läßt sich ähnlich wie in vorherigen Übungen abschätzen.

* die bekannte obere Schranke an die Proton Lebensdauer:

$$\tau_{proton} > 10^{32}\,y$$

aber aus $m_{GUT} \approx 10^{15}$ GeV erhält man nur

$\tau \approx 10^{28 \pm 1.3}\,y$ d.h. die einfache SU(5) Idee klappt nicht (liegt aber nicht so falsch)

=> Sollte eines Tages Proton-Zerfall beobachtet werden wäre dies ein guter Hinweis auf eine dem SM zugrundeliegende GUT!