Neutrino-Massen

* da das SM jetzt nur noch eine effektive Theorie bei niedrigen Energien ist muß es nicht mehr renormierbar sein

  $\Rightarrow$ wir können SM Vertizes von 4 Fermionen (wie in der Fermi-Theorie) erlauben

<u>Bsp</u> $\mathcal{L}_{m_\nu} = -\frac{h_\nu^2}{m_{GUT}} \bar{L}_{1L} \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^{+} L_{1L}$ + 2. & 3. Generation

mit $L_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ und $\tilde{\Phi} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$

* wegen $\bar{\nu}_L \nu_L = 0$ generiert dieser Term zwar keine Massen der Neutrinos aber es gibt andere, so daß

$$\boxed{m_\nu \approx \frac{h_\nu^2 v^2}{2 m_{GUT}}}$$ herauskommt

* das Spektrum der Lepton-Massen zwischen Elektron e und Top-Quark t beträgt

$$m_e = \frac{h_e v}{\sqrt{2}} \approx 0{,}5\ \text{MeV} \quad \text{und} \quad m_t = \frac{h_t v}{\sqrt{2}} \approx 174\ \text{GeV}$$

* falls für die <u>Neutrino-Yukawakopplung h_ν</u> gilt $h_e \lesssim h_\nu \lesssim h_t$ erhalten wir mit m_{GUT} 10^{15}

$$\frac{(0{,}5\,\text{MeV})^2}{10^{15}\,\text{GeV}} \approx \frac{10^{11}}{10^{24}}\,\text{eV} \lesssim m_\nu \lesssim \frac{(175\,\text{GeV})^2}{10^{15}\,\text{GeV}} = \frac{10^{22}}{10^{24}}\,\text{eV}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10^{-13}\,\text{eV} \lesssim m_\nu \lesssim 10^{-2}\,\text{eV}$$

und damit eine „natürliche" Erklärung für Neutrino-Massen im sub centi-eV Bereich

Vereinheitlichung des SM (oder GUT) mit Gravitation?

– Das Coleman-Mandula Theorem

* Quantisierung der Gravitation?

Newtonsche Gravitationskonstante G hat dim $[G] = m^{-2}$

-> die Gravitationstheorie ist nicht renormierbar, aus Dimensionsgründen lassen sich keine sog. Counterterme (s. Diskussion S. 84-85) hinzufügen

* vielleicht sind die Schleifen (loop) Diagramme gar nicht ∞!?

Gravitation ohne Materie 1loop $< \infty$, 2-loop nicht
" mit " 1loop nicht

(Hinzunahme von Supersymmetrie: Divergenzen aus Fermionische und Bosonische loops heben sich weg, endlich bis $\leq$ 6-loop)
– alle Ordnungen?

Trotzdem: gibt es zumindest eine Gruppe, die die Symmetrien der Gravitation und des SM (oder SU(5) GUT) enthält?

Nein: CM

Zur Vorbereitung dieser Feststellung: Erzeugende von Symmetrietrafo

* betrachte infinitesimale Trafos

• Zeittranslation mit Parameter $|\tau| \ll 1$

$$f(t) \to f(t+\tau) \overset{\text{Taylor}}{=} f(t) + \tau \dot{f}(t) + \mathcal{O}(\tau^2)$$

$$= (1 + \tau \underbrace{\partial_t}_{\text{infinitesimaler Generator/Erzeugender}}) f(t) + \mathcal{O}(\tau^2)$$

Noether-Theorem: Symmetrie unter Zeittranslation $\Leftrightarrow$ Energieerhaltung

- Raumtranslationen: (Noether: $\Leftrightarrow$ Impulserhaltung)

$$f(\vec{q}) \to f(\vec{q}+\vec{\varepsilon}) = f(\vec{q}) + \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{q}) + O(\vec{\varepsilon}^2)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} (1 + \varepsilon_i \partial_i) f(\vec{q}) + O(\vec{\varepsilon}^2)$$

mit Parameter $|\varepsilon_i| \ll 1$

$\uparrow$ Erzeugende

- Rotationen: (Noether: Drehimpulserhaltung)

$$f(\vec{q}) \to f(\vec{q} + \delta\alpha\, \vec{n}\times\vec{q}) \overset{\text{Taylor}}{=} f(\vec{q}) + \delta\alpha(\vec{n}\times\vec{q})\vec{\nabla} f(\vec{q}) + O(\delta\alpha^2)$$

$$= (1 + \delta\alpha\, \varepsilon_{ijk} n_i q_j \partial_k) f(\vec{q}) + O(\delta\alpha^2)$$

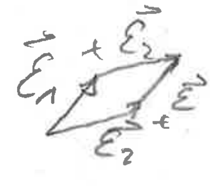
infin. Drehung um Achse $\vec{n}$ mit Winkel $\delta\alpha$

* je nach Wahl der Achse gibt es 3 unabhängige Drehrichtungen ($z.B.\ \vec{n} = \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) $\Rightarrow$ 3 unabh. Erzeugende $M_{ij} = q_i \partial_j - q_j \partial_i$

($= -M_{ji}$ antisym. Matrix)

* Vertauschen diese?

(Ja:) Translationen $[\partial_j, \partial_k] = 0$ da



(Nein:) Rotationen & Translationen

$$[\partial_k, M_{ij}] = \delta_{ki}\partial_j - \delta_{kj}\partial_i$$

(Nein:) Rotationen $[M_{ij}, M_{kl}] = \delta_{jk} M_{il} - \delta_{jl} M_{ik} - \delta_{ik} M_{jl} + \delta_{il} M_{jk}$

* die Erzeugenden $\{\partial_k, M_{ij}\}$ bilden eine Algebra und schließen untereinander nach $[\,,\,]$ (und ∂_t vertauscht mit allen)

* Wenn wir noch Lorentztrafos hinzunehmen erhalten wir die Erzeugenden-Algebra für alle Raum-Zeit-Trafos, unter denen eine spezielle relativistische Theorie invariant ist:

* Zunächst <u>Vierervektor</u> P_μ für Erzeugende von Raum-Zeit translationen: $P_\mu = i\partial_\mu = i(\partial_t, \partial_{k=1,2,3})$ mit

$$\Rightarrow \boxed{[P_\mu, P_\nu] = 0}$$

<u>Lorentztrafos</u> $(c=1)$ $(c=1 \Rightarrow v \leq 1)$

z.B. in x_3-Richtung: boost um $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh\xi$

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0 - v x_3) = x_0\cosh\xi - x_3\sinh\xi \\ x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= \gamma(x_3 - v x_0) = x_3\cosh\xi - x_0\sinh\xi \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cosh\xi & 0 & 0 & -\sinh\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\xi & 0 & 0 & \cosh\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(Vergleich mit Rotation
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\mathbb{1}_4 + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Erzeugende}} + O(\alpha^2) \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

boost hier
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \left(\mathbb{1}_4 + \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\xi^2) \right)$$

$\Rightarrow$ infinitesimale Erzeugende lassen sich boosts schreiben als $M_{0j} = q_0 \partial_j - q_j \partial_0$

entsprechend kovariant

$$M_{\mu\nu} \equiv q_\mu P_\nu - q_\nu P_\mu = -M_{\nu\mu} \quad \text{Boost \& Rotationen}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho \\ &[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \\ &[P_\mu, P_\nu] = 0 \end{aligned}}$$

Poincaré-Algebra

Coleman-Mandula Theorem [s. M.F. Sohnius: Phys. Rep. 128 (1998) 39-204]

Gegeben eine lokale[1], relativistische QFT mit einer nicht-trivialen S-Matrix[2] S_{fi} (s. S. 53 Skript) und einen eindeutigen Grundzustand[3]) sowie einen endlichen Abstand zum ersten angeregten 1-Teilchenzustand.

$\Rightarrow$ Die maximale Symmetrie unter Koordinatentrafos ist durch die Poincaré-Algebra erzeugt.

Alle weiteren inneren Symmetrien werden durch Lie Gruppen erzeugt (wie $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(5)$ usw.)

$$[B_r, B_s] = i f_{rst} B_t \qquad \text{z.B.} \quad B_r = \sigma_r \;\; r=1,2,3$$

und diese vertauschen mit der Poincaré-Algebra

$$[B_r, P_\mu] = 0 = [B_r, M_{\mu\nu}]$$

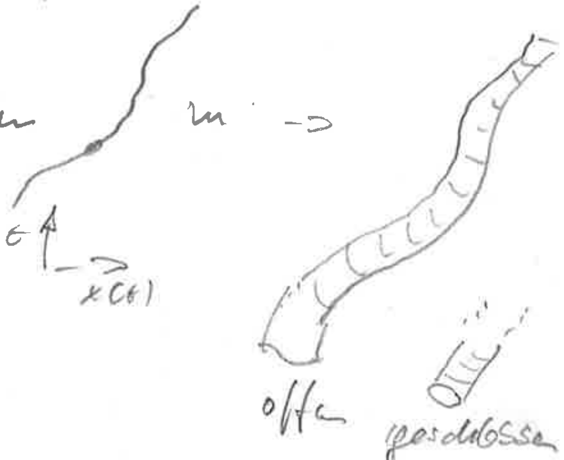
d.h. die Theorie der Gravitation (Allgem. Relativitätstheorie, also lokalen Koord.trafos) und innere Symmetrien können nicht Teil einer größeren Symmetriegruppe sein (in der diese koppeln)

* Die Annahmen 1)-3) werden i.A. als sinnvoll angesehen. Hierzu gibt es aber Ausnahmen

zusammen: Super-String theorie

zu 1) <u>Lokalität</u>:

in der Stringtheorie werden Punktteilchen zu → ausgedehnten Objekten,
d.h. die <u>WW ist nicht mehr lokal!</u>



3) Wenn das <u>Vakuum entartet</u> ist gibt es zusätzlich noch die <u>konformen</u>, d.h. winkeltreuen Koordinatentrafos. Dies löst aber nicht das Problem der Vereinheitlichung in eine größere Symmetriegruppe

<u>Supersymmetrie</u>: hier wird das Konzept der bosonischen, d.h. kommutierende auf Fermionische, d.h. antikommutierende Erzeuger $Q_{\alpha i}$ erweitert und so CM umgangen:

$$\{ Q_{\alpha i}, Q^{+i}_{\dot\beta} \} = 2\, \delta_i^j (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\, P_\mu$$

$i = 1, 2, \ldots, N$ Anzahl der Supersymmetrien

$$\{ Q_{i\alpha}, Q_{\beta j} \} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}\, a^\nu_{ij}\, B_\nu$$

$\Rightarrow$ P_μ und innere Sym. Erz. B_ν können gekoppelt werden

$\Rightarrow$ $\exists$ mögliche Verallgem. in sog. Super-Lie-Gruppen